B1 - Teil - Lösungen

(5)

1.1. geg.: momentane Änderungsrate der Staulänge ($0 \le x \le 4$)

$$f(x) = x(8-5x)\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right)^2$$
$$= -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$$

x ... ist die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Std.

$f(x)$ ... momentane Änderungsrate der Staulänge in $\frac{km}{h}$

- ges.: Zeigen $f(x) = \frac{27}{16}\,\frac{km}{h}$ nach 1 Std. (07:00 Uhr)

  Lös.: $f(1) = 1\cdot(8-5)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{27}{16}\,\frac{km}{h}}}$

- ges.: Nullstellen der Fkt. $f(x)$

  Lös.: $f(x) = 0 = x\cdot(8-5x)\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right)^2$

  $x_{0_1} = 0 \qquad x_{0_2} = \frac{8}{5} \qquad x_{0_3} = 4$

  $\rightarrow$: $\underline{\underline{06:00}}$ $\quad$ $\underline{\underline{07:36}}$ $\quad$ $\underline{\underline{10:00}}$

(9)

- ges.: Begr. dafür, dass es keine weiteren Nullstellen gibt

  Lös.: Begr. liegt in der Möglichkeit, durch Faktorisierung genau drei Nullstellen zu finden

---

- geg.: $f(2) < 0$

  ges.: Bedeutung

  Lös.: um 08:00 Uhr ist die momentane Änderungsrate < 0
  $\rightarrow$ Staulänge nimmt ab

1.2. ges. Zeitpunkt der größten Änderungsrate $\rightarrow$ Max von $f(x)$

Lös.: CP - Graph: Max suchen : $\underline{\underline{x_E = 0{,}62\,h}} \rightarrow \hat{=}$ 37,2 Min

$1 \;\hat{=}$ 60 Min

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Zeitpunkt: 06:37 Uhr}}}$

(3)

$f(0{,}62) \approx \underline{\underline{2{,}17\,\frac{km}{h}}}$ liegt zw. 2 und 3 $\frac{km}{h}$

1.3. • ges.: Zeitpunkt des längsten Staus

Lös.: Wenn $f(x) > 0$ ist, nimmt der Stau (mehr oder weniger) zu

Die Zunahme ist um 06:37 z.B. am größten (2)

Demzufolge muss der Stau um 07:36 am längsten sein
(→ Aufgabe 1.1.)

1.4. geg.: $s(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$

• ges.: $s(x)$ beschreibt die Staulänge

Lös.: Begründung (4)

s ist die Stammfkt. von f: $s'(x) = f(x)$

s beschreibt die Staulänge

$s(x) = 0$ bedeutet: Kein Stau, z.B: $s(0)=0$ Kein Stau

• ges. $s(4)$

Lös.: $s(4) = 0$ → 10:00 Uhr kein Stau

1.5. geg.: $s(x)$

ges.: Zunahme der Staulänge von 06:30 bis 08:00

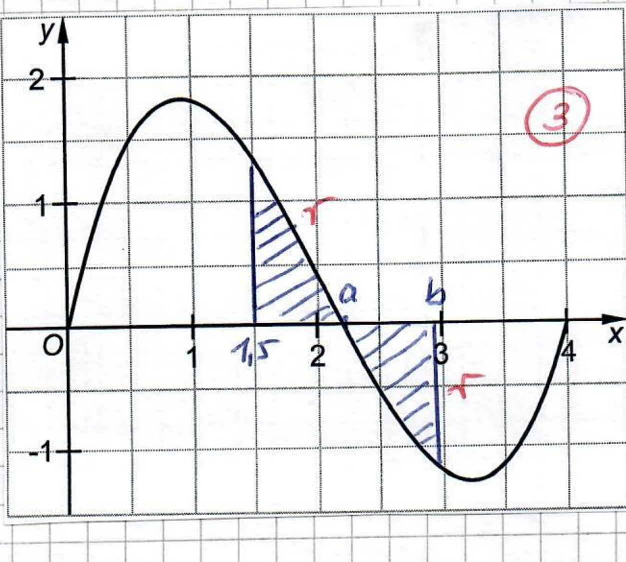
Lös.: $s(x)$ im Intervall von 0,5 bis 2 (3)

$s(2) - s(0{,}5) = 1{,}33$ km Zunahme

Lös.: durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{1{,}33 \text{ km}}{1{,}5 \text{ h}} = 0{,}89 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

1.6. geg.: Graph in Abb.

Lös.: Staulänge ist die Stammfkt zur ges. Fkt. in der Abb. = Fläche unter der Fkt.



(3)

Die Flächeninhalte müssen in den Intervallen $1{,}5 \leqq x \leqq a$ und $a \leqq x \leqq b$ übereinstimmen

1.7. geg.: $h_k(x) = (x-3)^k + 1$, $k > 0$

- ges.: $\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-3)^k + 1 = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ +\infty, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$

- ges.: Koordinaten der beiden gemeinsamen Punkte der Schar

Lös.: $h_k(x) = h_2(x)$ mit $k \neq 2$

$(x-3)^k + 1 = (x-3)^2 + 1 \quad | -1$

$(x-3)^k = (x-3)^2$

6

Gleichung gilt nur für $x-3=0$ und $x-3=1$

$\curvearrowright \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$

$\curvearrowright \quad \underline{\underline{P_1(3|1)}} \qquad \underline{\underline{P_2(4|2)}}$

1.8. geg.: h_k, h_k'

Lös.: $h_k(x) = (x-3)^k + 1$

$h_k'(x) = k(x-3)^{k-1}$ muss lineare Fkt. sein, damit $h_k'(x)$ eine Tangente sein kann

5

$\curvearrowright \underline{\underline{k=2}}$ oder $k=1$

$\curvearrowright \quad h_2(x) = (x-3)^2 + 1 \Rightarrow h_2'(x) = 2(x-3) = 2x-6$

$h_1(x) = (x-3) + 1 \Rightarrow h_1'(x) = 1$

$\curvearrowright$ für $k=1$ ist h_1' keine Tangente, da waagerechter Verlauf und h_1 verläuft schräg (Anstieg 1)

1.9. geg.: $h_k(x) = (x-3)^k + 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 5$

Lös.: $h_k'(x) = k \cdot (x-3)^{k-1}$

6

$h_k'(1) = \underline{\underline{k \cdot (-2)^{k-1}}} = m_1$; $h_k'(5) = \underline{\underline{k \cdot (2)^{k-1}}} = m_2$

falls k ungerade ist, gilt: $k \cdot (-2)^{k-1} = m_1$ ist positiv

$k \cdot (2)^{k-1} = m_2$ ist positiv

und $(-2)^{k-1} = 2^{k-1}$ $\quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{m_1 = m_2}}$

1.10 $\forall x \in \mathbb{R}$ und $3 \leq x \leq 4$ gilt $h_k(x) \geq h_{k+1}(x)$

ges.: geometr. Bedeutung von Schritt I

Lös.: Das best. Integral ist die Fläche, die von h_k u. h_{k+1} im Intervall $3 \leq x \leq 4$ mit einem Wert von $\frac{1}{30}$ eingeschlossen wird.

ges.: Schritt II

Lös.: Lösung des best. Integrals in Abh. von k mittels HS der Diff.- u. Integralrechn.

ges.: Wert von k

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\frac{1}{30} = \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$30 = (k+1)(k+2)$$

$$30 = k^2 + 3k + 2$$

$$0 = k^2 + 3k - 28$$

$$k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{112}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2} \curvearrowright \left(\underline{\underline{k_1 = -7}}\right);\ \underline{\underline{k_2 = 4}}$$

7