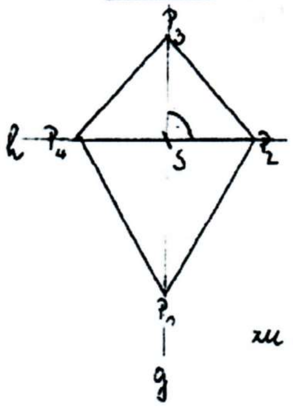
8. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2024/25; Analytische Geometrie I - Lösungen

Lösungen 8. Prüfungskomplex

a) ges. P_2: Das Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ ist ein Drachenviereck.
Die 4 Eckpunkte liegen in der xy-Ebene $\rightsquigarrow$
Es kann zur Lage von Geraden in der Ebene übergegangen werden.



Lösungsplan: (1) Berechnen von S als Schnittpunkt von g und h
(2) $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_4} + 2 \cdot \overrightarrow{P_4S}$

zu (1): $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \end{pmatrix}$ $\quad (r, s \in \mathbb{R})$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$

$g \cap h$: GTR PROGR „Lage PGE"
Eingeben von g und h
Berechnung von S $\rightarrow$ $S(7|24)$

(im Raum: $S(7|24|0)$)

zu (2): $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_2(19|33|0)$

ges. A: $A = \frac{1}{2} e \cdot f = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_1P_3}| \cdot |\overrightarrow{P_4P_2}|$

$|\overrightarrow{P_1P_3}| = \left| \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{27^2 + 36^2 + 0^2} = 45 \text{ LE} = 45 \text{ m}$

$|\overrightarrow{P_2P_4}| = \left| \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{24^2 + 18^2 + 0^2} = 30 \text{ LE} = 30 \text{ m}$

$\rightsquigarrow A = \frac{1}{2} \cdot 45 \text{ LE} \cdot 30 \text{ LE} \mathrel{\hat{=}} 675 \text{ FE} = 675 \text{ m}^2$
$(1 \text{ LE} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ m})$

Preisberechnung: $675 \text{ m}^2 \cdot 73 €/\text{m}^2 = 49\,275 €$

Die Familie muss 24 975 € bezahlen.

−1−

b) ges. $\overline{CG}$

geg. $C\ (4|33|0)$

G ist Punkt der Ebene E_t

Lösungsplan: (1) $g(CG)$ ist senkrechte Grade zur Ebene E_{ABC}

(2) g und E_t schneiden sich in G $\Rightarrow$ Durchstoßpunkt berechnen

zu (1): $g(CG): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$

zu (2): $g \cap E_t$:

$$34 \cdot 4 + 4t \cdot 33 + 25 \cdot r = 144t + 200$$
$$144t + 25 \cdot r = 144t + 200$$
$$25r = 200$$
$$r = 8$$

$\Rightarrow g(CG)$ ist unabhängig von t

ges. $|\overrightarrow{CG}|$: $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 8 \end{pmatrix}$

$G\ (4|33|8)$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{CG}| = 8$ m

$(z_G \hat{=} h)$

---

c) $E_5: 15x + 20y + 25z = 920$

$F_5: 15x + 20y - 25z = 270$

ges. k_5: k_5 ist Schnittgerade der Ebenen E_5 und F_5

$\Rightarrow$ GTR: PROGR „Lage PgE"

Eingabe der Ebenengleichungen von E_5 und F_5

Berechnung der Schnittgeraden:

$k_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 38\frac{1}{3} \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1000 \\ 750 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder

$k_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 38\frac{1}{3} \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ges. Nachweis: $E_5 \perp F_5$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_{E_5}} \circ \overrightarrow{n_{F_5}} = 0$

$\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix} = 225 + 400 - 625 = 0$ w. A.

$\Rightarrow E_5 \perp F_5$

– 2 –

zu c)

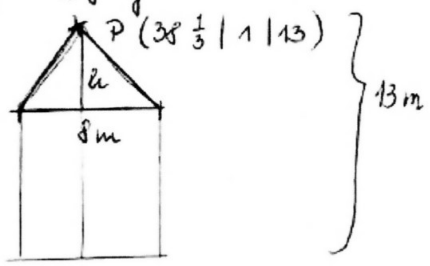
ges. Volumen des Hauses V

$V = V_{Quader} + V_{\underset{(Prisma)}{Dach}}$

$V_{Quader} = a \cdot b \cdot c = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CG} = 10\,m \cdot 15\,m \cdot 8\,m$
$\underline{= 1200\,m^3}$

$V_{Prisma} = A_G \cdot h = A_\Delta \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot 10m \cdot 15m$
$\underline{= 375\,m^3}$

NR: $A_\Delta = \frac{1}{2} g \cdot h_g$



$\curvearrowright$ $h = 13m - 8m = 5m$

$\curvearrowright$ $V = 1200\,m^3 + 375\,m^3 = \underline{\underline{1575\,m^3}}$

Der umbaute Raum hat ein Volumen von $1575\,m^3$

---

zu d) geg. α als Winkel zwischen E_t und xy-Ebene
α soll zwischen $30°$ und $45°$ liegen

$\curvearrowright$ Lösungsplan:

und + eingeschränkt

geg. $\overrightarrow{n_{E_t}} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 25 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{xy\text{-}EB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ges. $\cos\alpha = \left| \frac{\overrightarrow{n_{E_t}} \circ \overrightarrow{n_{xy}}}{|\overrightarrow{n_{E_t}}| \, |\overrightarrow{n_{xy}}|} \right| = \left| \frac{25}{\sqrt{25t^2+625} \cdot 1} \right|$ *

wegen $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ folgt

$\frac{1}{2}\sqrt{3} \geq \cos\alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{3} \geq \frac{25}{\sqrt{25t^2+625}} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ /Reziprokbildung

$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{25t^2+625}}{25} \leq \sqrt{2}$ $/ \cdot 25$

$\frac{50}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{25t^2+625} \leq 25\sqrt{2}$ /Quadrieren!)

– 3 –

und $\quad \frac{2500}{3} \leq 25t^2 + 625 \leq 625 \cdot 2 \qquad \Big| -625 \quad \Big| :25$

$8\frac{1}{3} \leq t^2 \leq 25 \qquad \Big| \sqrt{} \qquad [t > 0]$

$\underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{3}} \leq t \leq 5}}$

[Probe wegen nichtäquivalenten Umformungen !
setze $t_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}$ und $t_2 = 5$ in * ein !
und $30° \leq \alpha \leq 45°$ muss gelten]

für t_1: $\quad \cos\alpha = \frac{25}{28{,}8675} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \curlyvee \quad \alpha = 30°$

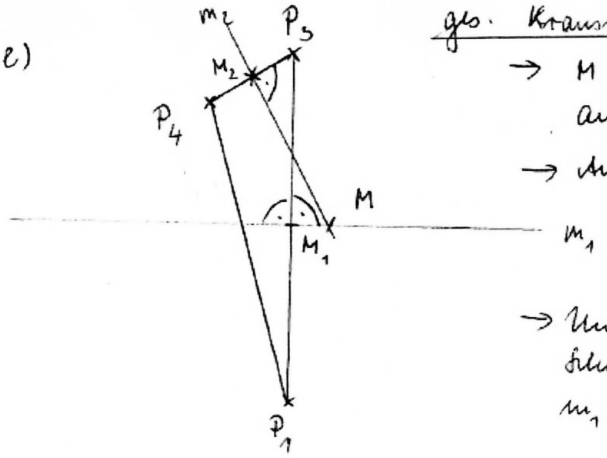
für t_2: $\quad \cos\alpha = \frac{25}{35{,}3553} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \curlyvee \quad \alpha = 45°$

$\curlyvee$

Bestätigung der Lösung !

– 3a –

e)



ges.: Kranstandort M, r

→ M ist Umkreismittelpunkt, auf dem P_1, P_3 und P_4 liegen

→ Auslegerweite ist der Radius r

$r = \overline{P_1M}$

→ Umkreismittelpunkt als Schnitt der Mittelsenkrechten m_1 und m_2 (Skizze

ges. m_1: Senkrechte von $g(P_1P_3)$ durch M_1

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 18 \end{pmatrix}$, verzicht auf z-Koordinate wegen xy-Ebene!

$\vec{a} \perp \overrightarrow{P_1P_3}$

$\vec{a} \circ \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \end{pmatrix} = 0 \quad \curvearrowright \vec{a} = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$

$\curvearrowright$

$m_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$

ges. m_2 (analog)

$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \end{pmatrix} = 0 \quad \curvearrowright \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$

$\curvearrowright$

$m_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$

ges. M: $m_2 \cap m_1$ → TR: „Lage PgE" „PROGR"

Eingabe der Geradengleichungen
Berechnen des Schnittpunktes

$M(17{,}5 \mid 22{,}5)$

ges. $r = |\overrightarrow{P_1M}| = \sqrt{7{,}5^2 + 22{,}5^2} = 7{,}5 \cdot \sqrt{10} \approx 23{,}7$

Der Kran muss sich im Punkt $M(17{,}5 \mid 22{,}5 \mid 0)$ befinden und eine Auslegerlänge von ca. 23,7 m haben.

— 4 —

u e) Liegt auch P_2 im Kreis $\Rightarrow$ Einsetzen von P_2 in Kreisgleichung $\rightarrow$ vergleich mit r^2

$$k: \quad (x-17{,}5)^2 + (y-22{,}5)^2 = 562{,}5$$

$$P_2 \text{ in } k: \quad (19-17{,}5)^2 + (33-22{,}5)^2 = 112{,}5 < 562{,}5$$

$\Rightarrow$ P_2 liegt im Innern des Kreises

$\Rightarrow$ Der Kran erreicht das gesamte Grundstück

– 5 –

6

2) geg.: $E:\ 2x + z = 3$

$g_t:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$

a) ges.: t für $g_t \parallel E$

Lös: g_t in E einsetzen:

$$2\cdot\big(2+t+s(1+t)\big) + (1+t+st) = 3$$
$$4 + 2t + 2s + 2st + 1 + t + st = 3$$
$$2s + 3st = -2 - 3t$$
$$s(2+3t) = -2-3t$$
$$s = \frac{-2-3t}{2+3t} = -1$$

$\curvearrowright$ $s = -1$, falls $t \neq -\frac{2}{3}$! und $g_t \times E$

$\curvearrowright$ für $t = -\frac{2}{3}$ ist $g \parallel E$ und sogar $\in E$, da $s = \frac{0}{0}$

---

ges. Schnittpunkt: $g_t \times E$ in S_t für $t \neq -\frac{2}{3}$

Lös: Mit $s = -1$ folgt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \curvearrowright S_t(1|t|1)$$

---

ges.: t, falls $g_t \perp E$: $\vec{a}_t = r\cdot\vec{n}_E$

Lös: $\begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{rcll} 1+t &=& 2r & \text{I} \\ 1-t &=& 0 & \text{II} \\ t &=& r & \text{III} \end{array}$

III in I: $1 + t = 2t \curvearrowright \underline{\underline{t = 1}}$, Probe mit II!

$\curvearrowright$ $g_t \perp E$, falls $t = 1$ ist.

7

zu 2)

b) ges.: $g_t \times h_t$ in P_t

Lös: Lin. Unabhängigkeit der Richtungsvektoren kann lt. Aufgabe vorausgesetzt werden

„$g_t = h_t$"

$$\begin{array}{rcl} 2+t+s(1+t) &=& 0+u \\ 1+s(1-t) &=& t+1-u \\ 1+t+st &=& -1+2u \end{array}$$

3 Gl. / 3 Unbek.

$$\begin{array}{rcl} 2+t+s+st &=& u \\ 1+s-st &=& t+1-u \\ 1+t+st &=& -1+2u \end{array}$$

Umstellen

$$\begin{array}{rcl} t+s+st-u &=& -2 \\ -t+s-st+u &=& 0 \\ t+st-2u &=& -2 \end{array} \quad \downarrow + \quad \downarrow -$$

Lösen nach GAUSS

$$\begin{array}{rcll} t+s+st-u &=& -2 & \mathrm{I} \\ 2s &=& -2 & \mathrm{II} \\ s+u &=& 0 & \mathrm{III} \end{array}$$

aus II folgt: $s = -1$

aus III folgt: $u = 1$

in I: $t - 1 - t - 1 = -2$

$-2 = -2$ wahr $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es existiert $\forall t \in \mathbb{R}$ Schnittpunkt P_t mit $P_t(1/t/1)$ (z. B. u in h_t einsetzen)

---

ges.: $r \cdot \begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{\text{von } g_t}{\vec{a}_t} \times \underset{\text{von } h_t}{\vec{b}_t}$ (in Abhängigkeit von r, da das Kreuzprodukt einen Vektor mit festem Betrag erzeugt)

Lös: $\begin{vmatrix} \vec{i} & (1+t) & 1 \\ \vec{j} & (1-t) & -1 \\ \vec{k} & t & 2 \end{vmatrix} = r \begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(gelöst) $\Rightarrow$ $-1 \cdot \begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ mit $r = -1$ ist die Bedingung erfüllt.

8

zu 2)

zu b) ges.: E_t (Koordinatengleichung) mit g_t und h_t

Lös.: Normalenvektor von E_t ist z.B. $\begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ein Punkt der Ebene ist z.B. $P_t(1|t|1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\curvearrowright$ Koordinatengleichung:

$$(t-2)x + (t+2)y + 2z = d$$

$$P_t \rightarrow \quad (t-2)\cdot 1 + (t+2)\cdot t + 2(1) = d$$

$$t-2 + t^2+2t + 2 = d$$

$$\underline{t^2 + 3t = d}$$

$$\curvearrowright E_t \quad \underline{\underline{(t-2)x + (t+2)y + 2z = t^2+3t}}$$

---

zu b) ges.: E_t geht durch O für $d=0$

Lös.: $t^2+3t = 0$

$$\curvearrowright \underline{\underline{t_1 = 0 \,;\ t_2 = -3}}$$

9

jetzt endlich zu c)

geg.: E_{-2} : $2x - z = 1$ (auf Seite -3- für $t = -2$ einsetzen, bloß mal so zur Probe!, klappt prima!)

ges.: $\sphericalangle(E, E_{-2})$

Lös.: $\cos \sphericalangle(E, E_{-2}) = \left| \frac{\vec{n} \circ \vec{n}_{-2}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_{-2}|} \right|$

$$= \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \right|$$

$$= \left| \frac{4 - 1}{5} \right| = 0{,}6$$

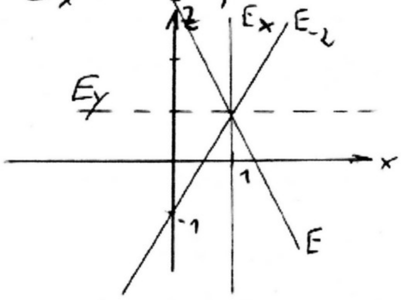
$\Rightarrow \cos \sphericalangle(E, E_{-2}) = 0{,}6 \Rightarrow \underline{\underline{\sphericalangle(E, E_{-2}) \approx 53^\circ}}$

geg.: E_x : $x = 1$; hat gleichen Abstand von E und E_{-2}

E_{-2} : $2x - z = 1$ ($z = 2x - 1$) ; parallel y-A.

E : $2x + z = 3$ ($z = -2x + 3$) ; parallel y-A.

Lös.: E_x : ist parallel zur yz-Ebene



Skizze aus Sicht der y-Achse

Wir schauen auf die Kanten der 3 Ebenen!

Und, schon sieht man, dass E_x die Winkelhalb. von E und E_{-2} ist

$\Rightarrow$ grafischer Nachweis!

- 4 -

10

nochmal zu c)
Der grafische Nachweis reicht aber nicht! Deshalb:

$$d^*(E_x, E) = d^*(E_x, E_{-2})$$

bzw. wählen wir
einen Punkt auf E_x
z.B.: $P_x(1|y|z)$ mit $y \in R \wedge z \in R$

$$\wedge \quad d^*(P_x, E) = d^*(P_x, E_{-2})$$

$$\left|\frac{2x_p + z_p - 3}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \left|\frac{2x_p - z_p - 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right|$$

$$P_x \rightarrow \quad \left|\frac{2 + z_p - 3}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{2 - z_p - 1}{\sqrt{5}}\right|$$

$$\left|\frac{-1+z_p}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{1-z_p}{\sqrt{5}}\right|$$

Fallunterscheidung:

1)
$$\frac{-1+z_p}{\sqrt{5}} = \frac{1-z_p}{\sqrt{5}}$$
$$-1+z_p = 1-z_p$$
$$\underline{z_p = 1} \quad \wedge \quad \underline{P_x(1|y|1)}$$

das sind alle
Punkte der Ebene E_y
(→ Skizze!)

2)
$$-\left(\frac{-1+z_p}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1-z_p}{\sqrt{5}}$$
$$1-z_p = 1-z_p$$
$$1 = 1 \quad \text{wahr } \forall z_p \in R$$
$$\wedge \quad \underline{P_x(1|y|z_p)}$$ w.z.z.w.

alle Punkte auf E_x