Lösungen Prüfungskomplex 4 – Mathe Leistungskurs 2024/25

1)unbestimmtes Integral, Menge aller Stammfunktionen: a),b),c),g),h),j),k)
uneigentliches Integral: i),l)
bestimmtes Integral: d),e),f)

Die Lösungen von e),g),h) werden hier nur unter Verwendung des TR und CAS angegeben, da sie weiterführende Integrationsregeln (nichtlineare Substitution, partielle Integration) verlangen würden.

a) $\int (t^5 + t^2)\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{3}t^3 + c}} \quad (c \in \mathbb{R})$

b) $-\frac{1}{3}\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{x}} + c}}$

c) $\int \frac{3}{6x-8}\,dx = 3\int (6x-8)^{-1}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|6x-8| + c}}$

d) $\int_{-1}^{0} (2x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{10}(2x+5)^{\frac{5}{3}}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{5^5} - \sqrt[3]{3^5}\right) \underline{\underline{\approx 2{,}514}}$

e) $\underline{\underline{\approx 1{,}571}}$ (TR)

f) $\int_{0}^{\pi} 2\,dx = [2x]_0^{\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$

g) $= 3\int (1-3x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \underline{\underline{-2\sqrt{1-3x} + c}}$

h) $= \int 1 - \frac{6}{x}\,dx = \underline{\underline{x - 6\ln|x| + c}}$

i) $\int_{b}^{-1} 4x^{-5}\,dx = \left[-\frac{1}{x^4}\right]_b^{-1} = -1 + \frac{1}{b^4}$

$\lim\limits_{b \to -\infty} -1 + \frac{1}{b^4} = -1 \quad \leadsto \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x^5}\,dx \underline{\underline{= -1}}$

j) $\underline{\underline{= \frac{1}{3}e^{3x-1} + c}}$

k) $\int e^{2x}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x} + c}}$

l) $\frac{1}{2}\cdot\int_{a}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 1 - \sqrt{a} \rightarrow \lim\limits_{a \to 0} 1 - \sqrt{a} = \underline{\underline{1}}$

2) Rechnerische Lösung:

$$\int_1^a (3x-1)^{-1}\,dx = 0{,}1 = \left[\tfrac{1}{3}\cdot \ln|3x-1|\right]_1^a$$

$$0{,}1 = \tfrac{1}{3}\ln|3a-1| - \tfrac{1}{3}\ln 2$$

$$0{,}3 = \ln\frac{|3a-1|}{2}$$

$$e^{0{,}3} = \tfrac{1}{2}|3a-1|$$

$$2e^{0{,}3} = |3a-1|$$

1. Fall

$$2e^{0{,}3} = 3a-1$$

$$a = \frac{2e^{0{,}3}+1}{3}$$

$$a \approx 1{,}233$$

2. Fall

$$-2e^{0{,}3} = 3a-1$$

$$a = \frac{-2e^{0{,}3}+1}{3}$$

$a \approx -0{,}567$ entfällt, da $a>1$

3) zu zeigen ist: $F_a'(x) = f_a(x)$, Ableitung nach Produktregel:

$$F_a'(x) = a\cdot e^{ax}\cdot\left(\frac{2x-1}{a} - \frac{2}{a^2}\right) + e^{ax}\cdot\frac{2}{a}$$

$$= e^{ax}\left(2x-1-\frac{2}{a}+\frac{2}{a}\right) = e^{ax}\cdot(2x-1) = f_a(x)$$

4) Bestimmen der Nullstellen von f: $0 = c - x^2$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{c}$

$$2 = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c-x^2)\,dx$$

Lösung: $c = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} - x^2$$

5) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax+2b$

Bedingungen zur Ermittlung von f

(1) $f'(1) = 0 \rightarrow 0 = 3a + 2b + c$

(2) $f''(2) = 0 \rightarrow 0 = 12a + 2b \rightarrow b = -6a \rightarrow c = -3a + 12a = 9a$

$\rightarrow f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax = ax(x^2 - 6x + 9) = ax(x-3)^2$

$\rightarrow$ Nullstellen von f sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

(3) A = 9 FE $\rightarrow 9 = \int_0^3 (ax^3 - 6ax^2 + 9ax)\,dx = [0{,}25ax^4 - 2ax^3 + 4{,}5ax^2]_0^3$ $\rightarrow a = 4/3$

$\rightarrow$ <u>$f(x) = 4/3x(x-3)^2$</u>

6) • $f(x) = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

• waag. Asymptote: g: $\underline{\underline{y = 1}}$ (TR – $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$)

• $A(z) = \int_0^z \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \underline{\underline{z - \sqrt{z^2+1} + 1}}$

(TR : MAIN , $\int$)

• $\lim\limits_{z\to\infty} A(z) \underline{\underline{= 1}}$

Untersuchung:

$$\lim_{z\to\infty} \underbrace{\underbrace{z}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{z^2+1}}_{+\infty}}_{\to 0} + 1 = 1$$

7) ges. Nst. :

$$0 = k\sqrt{x} - 3x$$
$$3x = k\sqrt{x}$$
$$9x^2 = k^2 \cdot x \quad /Q$$
$$0 = x(k^2 - 9x)$$
$$\underline{x_1 = 0} \qquad \underline{x_2 = \tfrac{1}{9}k^2}$$

Probe für x_1, x_2 !

$f(0) = 0$

$f\left(\tfrac{1}{9}k^2\right) = k\cdot\sqrt{\tfrac{1}{9}k^2} - 3\cdot\tfrac{1}{9}k^2$
$= 0$

$$A = \int_0^{\frac{1}{9}k^2} (k\cdot\sqrt{x} - 3x)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}k\cdot\sqrt{x^3} - \tfrac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{9}k^2} = \underline{\underline{\frac{-k^4}{54} + \frac{2}{81}k^3\cdot|k|}}$$

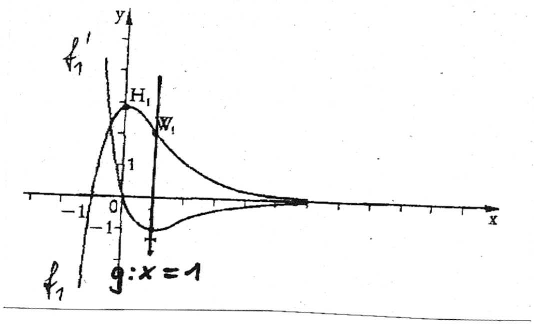
(oder mit TR!)

$$8 = \frac{-k^4}{54} + \frac{2}{81}k^3\cdot|k| \quad \text{(TR)}$$

$$\underline{\underline{k = 6}}$$

8) a) $f_1(x) = (x+1)\cdot e^{1-x}$ $\quad f_1'(x) = -x e^{1-x}$

Graphen : (hier nur verkleinerte Abbildung!)



b) $f_t'(x) = \frac{1}{t}\cdot e^{t-x} - (\frac{x}{t}+1)\cdot e^{t-x}$ (nach Produktregel, oder mit CAS)

$= \frac{1}{t}\cdot e^{t-x}(1-t-x)$

Setze $f'_t(x) = f_t(x)$ zu zeigen: es existiert ein gemeinsamer Punkt

$\frac{1}{t}\cdot e^{t-x}(1-t-x) = (\frac{x}{t}+1)\cdot e^{t-x}$

$0 = e^{t-x}(\frac{x}{t}+1-\frac{1}{t}+1+\frac{x}{t})$

$0 \neq e^{t-x}$

$0 = 2-\frac{1}{t}+\frac{2x}{t} \quad |\cdot t \quad (t>0)$

$0 = 2t-1+2x$

$x = \frac{1}{2}-t \qquad y = f_t(\frac{1}{2}-t) = \frac{1}{2t}\cdot e^{2t-\frac{1}{2}}$

$\underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}-t \;\middle|\; \frac{e^{2t-\frac{1}{2}}}{2t}\right)}}$

c) Es sei d die Länge der ausgeschnittenen Strecke.

HB : d minimal

NB : $d(t) = f_t(1) - f_t'(1) = (\frac{1}{t}+1)\cdot e^{t-1} - \frac{1}{t}e^{t-1}\cdot(-t)$

ZF : $d(t) = e^{t-1}(\frac{1}{t}+2)$

Lsg : $d'(t) = 0$ graph. Lösung : TR $\rightarrow y = d(t)$ Minimum

$\underline{\underline{t_{Min} = 0{,}5}}$

d) Nullstelle von f_1 : $x = -1$

$A(u) = \int_{-1}^{u}(x+1)\cdot e^{1-x}\,dx = \underline{\underline{-2e^{-u+1} - ue^{-u+1} + e^2}}$ (TR)

$\lim_{u\to\infty} A(u) = \underline{\underline{e^2}}$