Lösungen Prüfungskomplex 3 – Mathe Leistungskurs 2024/25

2.A) $\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}$ B) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h}$ C) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$

3. A) $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

B) $\lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}} = 1$

C) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

4. $f_1'(x) = 7x^6 - 4ax^3 - ax^{-2}$

$f_1''(x) = 42x^5 - 12ax^2 + 2ax^{-3}$

$f_2'(x) = -2a(x-2)^{-3}$

$f_2''(x) = 6a(x-2)^{-4}$

$f_3'(x) = -e^{2-x} + 2ax^{a-1}$

$f_3''(x) = e^{2-x} + 2a(a-1)x^{a-2}$

$f_4'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$

$f_4''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

$f_5'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x+3)$

$f_5''(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3\sin(3x+3)$

$f_6'(x) = -\frac{1}{x^2} + a - \frac{a}{2\sqrt{ax}}$

$f_6''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(ax)^3}}$

---

5. Lösungsweg:
   - Bilden der ersten, zweiten und dritten Ableitung
   - (1) Notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x)=0$
   - (2) Hinreichende Bedingung für Extremstellen $f''(x_E)\neq 0$
   - (3) Notwendige Bedingung für Wendstellen $f''(x)=0$
   - (4) Hinreichende Bedingung für Wendstellen $f'''(x_W)\neq 0$

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2}$

$= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}(-2+4x^2)$

$f'''(x) = -2x\,e^{-x^2}(-2+4x^2) + e^{-x^2}(8x)$

$= e^{-x^2}(-8x^3+4x+8x)$

$= e^{-x^2}(-8x^3+12x)$

1) $f'(x) = 0 \qquad 0 = -2xe^{-x^2}$

$x_E = 0$, da e^{-x^2} für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht Null wird.

2) $f''(0) = e^0(-2+0) = -2 < 0 \Rightarrow P_{Max}(0;1)$

3) $f''(x) = 0 \qquad 0 = e^{-x^2}(-2+4x^2)$

$0 = -2+4x^2$

$x^2 = \frac{1}{2} \qquad x_{W1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,;\quad x_{W2} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

4) $f'''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\left(-8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 + 12\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-4\sqrt{\frac{1}{2}} + 12\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8\sqrt{\frac{1}{2}}$ = oder = $\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{\frac{64}{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{32} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

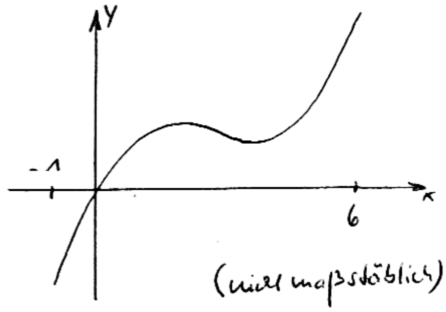
$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4\sqrt{2} \neq 0 \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \neq 0$

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ oder $P_{W1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -4\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$

$P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

6. geg.: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$



a) $DB = \{x;\ x \in R\}$; $WB = \{y;\ y \in R\}$

Nst: $0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad | \cdot 3$

$0 = x^3 - 9x^2 + 24x$

$0 = x\,(x^2 - 9x + 24)$

$\underline{x_{0_1} = 0}$ keine weiteren

b) Tangente / Normale bei $x_0 = 3$

T: $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(3) = 9 - 18 + 8 = \underline{-1 = m}$ ⇝ Tang. (halbfertig): $y = -x + n$

P(3|6) einsetzen:

$y = -x + n$

$6 = -3 + n$ ⇝ $\underline{n = 9}$ ⇝ Tang. (fertig): $\underline{\underline{y = -x + 9}}$

N: $\bar{m} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$ ⇝ Norm. (halbfert.) $y = x + n$

P(3|6) einsetzen:

$y = x + n$

$6 = 3 + n$ ⇝ $n = 3$ ⇝ Norm. (fertig): $\underline{\underline{y = x + 3}}$

c) $f'(x) = 0 = x^2 - 6x + 8$

$0 = (x-2)(x-4)$ ⇝ $x_{E_1} = 2$; $x_{E_2} = 4$

⇝ $\underline{\underline{P_{E_1}(2|6,\overline{6})\ ;\ P_{E_2}(4|5,\overline{3})}}$

d) $f'(s) = 3 = m$

⇝ $\tan\alpha = 3$ ⇝ $\alpha = \arctan(3) \approx \underline{\underline{71{,}6°}}$

e) $y = x + 3$ schneidet f:

$x + 3 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

Lösung z.B. mit GTR, GRAPH: Y1: $x + 3$

Y2: $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

DRAW, GSOLV, ISCT: $S_1(0{,}55|3{,}55)$

: $S_2(3 \mid 6)$ (↗b)

: $S_3(5{,}45|8{,}45)$

f) $y = mx$ schneidet ebenfalls f:

$mx = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad | - mx$

$0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (8-m)x$

$0 = x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 8 - m\right)}$

$\underline{x_{S_1} = 0}$

$0 = x^2 - 9x + 3(8-m)$

$0 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{81}{4} - 3(8-m)}_{D}}$

falls $D = 0$ ⇝ 2 Schnittpunkte

falls $D < 0$ ⇝ 1 Schnittpunkt (x_{S_1})

falls $D > 0$ ⇝ 3 Schnittpunkte

⇝ $D = 0 = \frac{81}{4} - 24 + 3m$

$m = \frac{5}{4}$ ⇝ 2 S.

$m < \frac{5}{4}$ ⇝ 1 S.

$m > \frac{5}{4}$ ⇝ 3 S.

und **für m = 8** ex. genau ein Schnittpunkt und ein Berührpunkt

7. a) $P_y(0|-0{,}5)$

Nst: $x_0 = 0{,}5$

Extr: $P_T(-1|-1)$; $P_H(2|0{,}5)$

WP: $P_{W1}(0{,}25|-0{,}2)$

$P_{W2}(-2|-0{,}8)$

$P_{W3}(3|0{,}4)$

b) für $f'(x)$:

Nst: (Extremstellen von $f(x)$) $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = 2$

x-Werte für $f'(x) > 0$: $-1 \leqq x \leqq 2$ (Anstieg bei $f(x) > 0$)

Extrema: Wendestellen von $f(x)$ sind Extremstellen bei $f'(x)$ $\curvearrowright$ 3 lokale Extrema

8. geg.: $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ ohne GTR!

8.1. ges.: Nullstelle

Lös.: $f(x) = 0 = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1 \quad | +1 \; | :2$

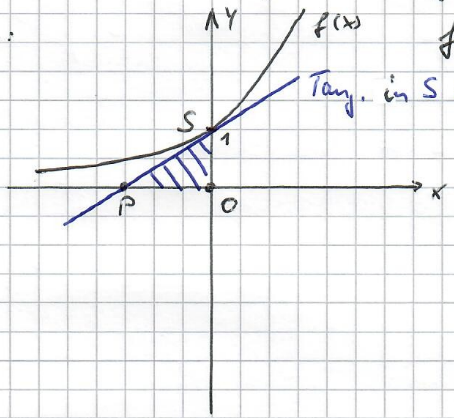
$\frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x} \quad$ | Umwandlung in Ln-Schreibweise

$\frac{1}{2}x = \ln\frac{1}{2} \quad | \cdot 2$

$\underline{\underline{x_0 = 2\ln\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{-2\ln 2}}$

8.2. ges.: Nachweis eines gleichschenkligen Dreiecks

Lös.:



für $x = 0$ gilt $y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} - 1$

$y = 2 \cdot 1 - 1$

$y = \underline{1}$

Zeigen, dass $\overline{OP} = 1$ ist! Dazu Tangentengleichung in S an f bestimmen und Nullstelle P finden.

Tangentengleichung: $y = mx + n$

NR: $f'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$ (Kettenregel + SPR + SR)

$\curvearrowright \underline{\underline{m}} = f'(0) = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \underline{\underline{1}}$

$\curvearrowright$ halbfertige Tangentengleichung: $y = x + n$

S einsetzen: $1 = 0 + n \curvearrowright \underline{\underline{n = 1}}$

$\curvearrowright$ fertige Tangentengleichung: $\underline{\underline{y = x + 1}}$

$\curvearrowright$ Nullstelle P: $y = 0 = x + 1 \curvearrowright \underline{x_0 = -1}$

$\curvearrowright \underline{\underline{\overline{OP}}} = |x_0|\,LE = \underline{\underline{1\ LE}} \Rightarrow$ w.z.z.w.

9. geg.: $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$; $x \in R,\ a \in R,\ a > 0$

Tangente in $P(-1 \mid f_a(-1))$ heißt t_a

9.1. ges.: Für jeden Wert a ist die Gleichung der Tangente $y = ae^{a-1}x + 2ae^{a-1}$ nachzuweisen

Lös.: Tangentengleichung: $y = mx + n$

NR: $f_a'(x) = a \cdot e^{a+x} \cdot 1$ (Kettenregel + SPR)

$\curvearrowright$ $\underline{\underline{m}} = f_a'(-1) = \underline{\underline{a \cdot e^{a-1}}}$

$\curvearrowright$ halbfertige Tangentengleichung: $y = ae^{a-1}x + n$

P einsetzen: → vorher noch P bestimmen:

$P(-1 / ae^{a-1})$

$\rightarrow ae^{a-1} = ae^{a-1} \cdot (-1) + n$

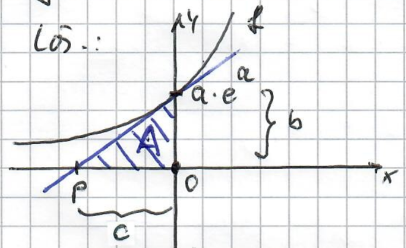
$ae^{a-1} = -ae^{a-1} + n \quad | + ae^{a-1}$

$\underline{\underline{2ae^{a-1} = n}}$

$\curvearrowright$ fertige Tangentengleichung: $\underline{\underline{y = ae^{a-1}x + 2ae^{a-1}}}$

9.2. ges.: Flächeninhalt eines Dreiecks

Lös.:



für $x = 0$ gilt $y = a \cdot e^{a+0}$

$\underline{y = a \cdot e^{a}}$

Für A gilt: $A = \frac{1}{2} c \cdot b = \frac{1}{2}\, \overline{OP} \cdot ae^{a}$

P finden: Nullstelle der Tangente:

$\curvearrowright \quad 0 = ae^{a-1}x + 2ae^{a-1} \quad | - 2ae^{a-1}$

$-2ae^{a-1} = ae^{a-1}x \quad | : ae^{a-1}$

$\underline{\underline{-2 = x_0}}$ $\curvearrowright$ $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot ae^{a} = \underline{\underline{ae^{a}}}$