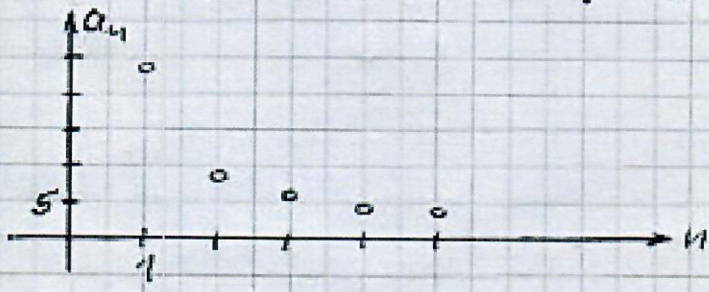
Lösungen zum 2. PK - MaLK 2024/25

GW von ZF und Fkt.

---

1. geg.: $(a_n)=\left(\frac{3n+21}{2n-1}\right)$

a) $(a_n)=(24;\ 9;\ 6;\ 4{,}71;\ 4;\ \dots)$



b) $2{,}5=\frac{3n+21}{2n-1} \quad |\cdot(2n-1)$

$5n-2{,}5=3n+21$

$2n=23{,}5$

$\underline{n=11{,}75 \wedge n\notin\mathbb{N}} \Rightarrow \underline{\underline{2{,}5 \text{ ist kein ZFG}}}$

c) Annahme: 2 sei obere Schranke:

$2\geq\frac{3n+21}{2n-1} \quad |\cdot(2n-1) \quad \forall n\in\mathbb{N}!$

$4n-2\geq 3n+21$

$\underline{n\geq 23} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht wahr } \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 2 \text{ keine o.S.}}}$

Annahme: 2 sei untere Schranke:

$2\leq\frac{3n+21}{2n-1}$

$\underline{n\leq 23} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht wahr } \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 2 \text{ keine u.S.}}}$

d) obere Grenze: $\underline{\underline{24}}$ untere Schranken: $\underline{\underline{\leq 1{,}5}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+21}{2n-1}=\underline{\underline{1{,}5}}$ ZF ist konvergent, da sie einen Grenzwert besitzt.

f) arithmetisch: es ex. ein $d=$ konst.?

$a_{n+1}-a_n=d\,!$

geometrisch: es ex. ein $q=$ konst.?

$a_{n+1}:a_n=q\,!$ ↓

zu 1 f) Der Nachweis kann mittels Fallbeispiele erfolgen:

arithmetisch? $a_3 - a_2 = d_1$; $a_2 - a_1 = d_2$

$d_1 = -3$; $d_2 = -15$

$\Rightarrow$ $d \neq$ Konst., nicht arithmet.

geometrisch? $a_3 : a_2 = q_1$; $a_2 : a_1 = q_2$

$q_1 = \frac{2}{3}$; $q_2 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ $q \neq$ Konst., nicht geometr.

---

2. a) 254 b) 27 c) 0 d) $\sum_{k=1}^{200}(2k-1) = 200^2$

3. $\sum_{k=1}^{21}(-50k + 230) = -6720$

GTR: $\Sigma((-50X + 230), X, 1, 21$

---

4. a) $\lim_{x \to 0} x^2 + 3x + 2 = \underline{\underline{2}}$ Funktionswert bei $x_0 = 0$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \frac{0}{0}$ „J. auf Lücke!" (Kürzen!)

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x(2+x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 + x = \underline{\underline{2}}$ Lücke

c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 4} = \underline{\underline{0}}$ Funktionswert bei $x_0 = 2$

d) $\lim_{x \to 1} \begin{cases} x^2 - 1; & x < 1 \\ \lg x; & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \underline{\underline{0}}$ Lücke

e) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}\right)^3 = \frac{0}{0}$ „J. auf Lücke" (Kürzen!)

$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \left(\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)}\right)^3 = \lim_{x \to -2}(x-3)^3 = \underline{\underline{-125}}$ Lücke

---

5. Asymptoten

$f(x)$	Polgeraden	waager. A.	schräge A.
a) $\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ Unstetigkeit bei $x=1$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}$ $= \lim\limits_{x\to 1} x+3 = 4$ $\Rightarrow$ Lücke, keine Polstelle bei $x_0=1$	keine, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})}$ $= \frac{\pm\infty\cdot(1+0-0)}{1-0}$ $= \pm\infty$	keine, da $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = x+3$ und damit liegt eine lin. Fkt. vor
b) $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x-2}$ Unstetigkeiten bei $x=-1$ und $x=2$	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2-2x-1}{(x+1)(x-2)}$ $= \frac{4}{0}$ $\Rightarrow$ Polstelle bei $x=-1$ $\Rightarrow$ Polgerade $x=-1$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-1}{(x+1)(x-2)}$ $= \frac{7}{0}$ $\Rightarrow$ Polstelle bei $x=2$ $\Rightarrow$ Polgerade $x=2$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-x-2}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$ $= 3$ $\Rightarrow$ Asy.: $y=3$	keine, da bereits waager. Asy. vorliegt
c) $3^{-x}\cdot 4^x$ bzw. $\frac{4^x}{3^x}$ Unstetigkeit keine	keine	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4^x}{3^x}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x$ $= \begin{bmatrix} +\infty \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ Asy.: $y=0$	keine

d) $\frac{x^2+2x+1}{4x-4}$ Unstetigkeit bei $x = 1$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2}{4(x-1)}$ $= \frac{4}{0}$ ⇒ Polstelle bei $x = 1$ ⇒ Polgerade: $\underline{\underline{x = 1}}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{4x-4}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}(4-\frac{4}{x})}$ $= \frac{\pm\infty(1+0+0)}{1(4-0)}$ $= \pm\infty$ ⇒ keine waag. A.	Polynomdiv.: $(x^2+2x+1):(4x-4) = \frac{1}{4}x+\frac{3}{4} + \frac{4}{4x-4}$ $-(x^2-x)$ $3x+1$ $-(3x-3)$ $R\ 4$ ⇒ Asy: $\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}}$
e) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ Unstetigkeiten bei $x = -1$ und $x = 3$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$ $= \frac{0}{0}$ „Indiz auf L." ⇒ Kürzen! ⇒ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+2}{x-3} = -\frac{1}{4}$ ⇒ Lücke, kein P. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$ $= \frac{20}{0}$ ⇒ Polstelle bei $x = 3$ ⇒ Polgerade $\underline{\underline{x = 3}}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ $= 1$ ⇒ waagr. Asy. $\underline{\underline{y = 1}}$	keine
f) $\frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)^2}$ Unstetigkeit bei $x = 1$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)^2}$ $= \frac{-2}{0}$ ⇒ Polstelle bei $x = 1$ ⇒ Polgerade $\underline{\underline{x = 1}}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)^2}$ $= \pm\infty$ ⇒ keine waag. As.	Polynomdiv.: $(x^3-x^2-2x):(x^2-2x+1) = x+1 + \frac{-x-1}{(x-1)^2}$ $-(x^3-2x^2+x)$ x^2-3x $-(x^2-2x+1)$ $R\ -x-1$ ⇒ Asy: $\underline{\underline{y = x+1}}$

6. Stetigkeitsnachweise:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; $x_{0_1} = 1$; $x_{0_2} = -1$

I) nach Def. gilt:

(1) $f(1) = \sqrt[3]{0} = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2-1} = 0$

(3) (1) $\equiv$ (2) $\curvearrowright$ <u>f ist stetig bei $x_{0_1} = 1$</u>

II) nach Def. gilt:

(1) $f(-1) = \sqrt[3]{0} = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^2-1} = 0$

(3) (1) $\equiv$ (2) $\curvearrowright$ <u>f ist auch stetig bei $x_{0_2} = -1$</u>

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = -2$; $x_{0_3} = 4$

I) nach Def. gilt:

(1) $f(-1) = \sqrt{0} = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x+1} = 0$

(3) (1) $\equiv$ (2) $\curvearrowright$ <u>f ist stetig bei $x_{0_1} = -1$</u>

II) nach Def. gilt:

(1) $f(-2) = \sqrt{-1}$ nicht def. $\curvearrowright$ <u>f ist nicht stetig bei $x_{0_2} = -2$</u>

III) nach Def. gilt:

(1) $f(4) = \sqrt{5}$

(2) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x+1} = \sqrt{5}$

(3) (1) $\equiv$ (2) $\curvearrowright$ <u>f ist auch stetig bei $x_{0_3} = 4$</u>

c) nach Def. gilt:

(1) $f(1) = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

(3) (1) $\equiv$ (2) $\curvearrowright$ <u>f ist stetig bei $x_0 = 1$</u>

7. f ist stetig, falls gilt

$$-x_0^2 + 2x_0 - 1 = tx_0 + 1 \quad \text{bei } x_0 = 1$$

$$-1 + 2 - 1 = t + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t = -1}}$$

8. Nachweis, dass f eine stetige Fkt. ist:

$\Rightarrow$ f ist eine stetige Fkt., wenn sie an jeder Stelle x_0 im DB stetig ist.

lt. Def. gilt:

(1) $$f(x_0) = \begin{cases} \frac{\sin(2x_0)}{x_0} & \text{bei } x_0 \neq 0 \\ 2 & \text{bei } x_0 = 0 \end{cases}$$

(2) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{\sin(2x_0)}{x_0} \quad ; \text{ falls } x_0 \neq 0$$

Da $x_0 = 0 \in DB$ ist, muss der Stetigkeitsnachweis bei $x_0 = 0$ extra durchgeführt werden, um dort einen Doppelsprung auszuschließen!

Zu zeigen ist:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x_0)}{x_0} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x_0 \cos x_0}{x_0} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin x_0}{x_0} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x_0 = 2$$

$$\lim_{x \to 0} 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x_0}{x_0}} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x_0 = 2$$

$$2 \cdot \underset{\text{lt. Hinweis}}{1} \cdot 1 = 2$$

$$\underline{\underline{2 = 2}} \quad \text{w.z.b.w.}$$

(3) (1) ≡ (2) $\Rightarrow$ <u>f ist stetig</u>