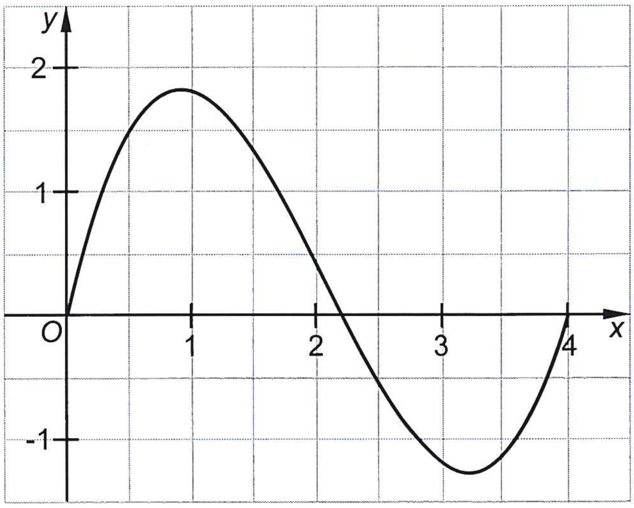
Arbeitsblatt zu Aufgabe B 1, Teilaufgabe 1.6



Prüfungsinhalt

Aufgabe B 1

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.

An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge für $0 \leq x \leq 4$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$f(x) = x \cdot (8 - 5 \cdot x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16} \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ beschrieben werden.

Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

1.1 Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate der Staulänge um 07:00 Uhr einen Wert von $\frac{27}{16}$ Kilometer pro Stunde hat.

Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat.

Begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

Es gilt $f(2) < 0$.

Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

Erreichbare BE-Anzahl: 09

1.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.

Zeigen Sie, dass der zugehörige Wert der momentanen Änderungsrate zwischen $2\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$ liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.3 Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.

Begründen Sie Ihre Angabe.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit

$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3 = -\frac{1}{16} \cdot x^5 + \frac{3}{4} \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2$ von Bedeutung.

1.4 Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.5 Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr.

Bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

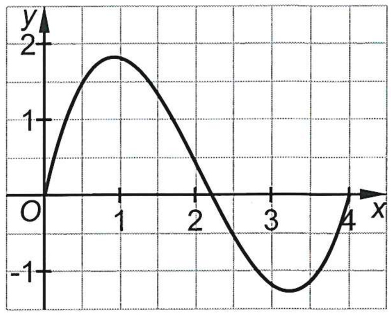
Fortsetzung auf Seite 9

Fortsetzung Aufgabe B 1

1.6 Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung gezeigten Graphen dargestellt.

Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde.

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat.



Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung auf dem Arbeitsblatt auf Seite 6.

Begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung auf dem Arbeitsblatt auf Seite 6.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $k > 0$.

1.7 Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

1.8 Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h_k' bezeichnet.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h_k' Tangente an den Graphen von h_k ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.9 An den Stellen 1 und 5 werden für jeden Wert von k Tangenten an den Graphen von h_k gelegt.

Begründen Sie, dass diese Tangenten für ungerade Werte von k jeweils den gleichen Anstieg haben.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

1.10 Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $3 \le x \le 4$ gilt: $h_k(x) \ge h_{k+1}(x)$.

Die folgenden Schritte liefern im Zusammenhang mit h_k einen Wert k.

I $\quad \dfrac{1}{30} = \displaystyle\int_3^4 \left((x-3)^k + 1 - (x-3)^{k+1} - 1\right) dx$

II $\quad \dfrac{1}{30} = \left[\dfrac{1}{k+1}\cdot(x-3)^{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\cdot(x-3)^{k+2}\right]_3^4 = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$

Geben Sie die geometrische Bedeutung von Schritt I an.

Erläutern Sie Schritt II.

Geben Sie k an.

Erreichbare BE-Anzahl: 07