

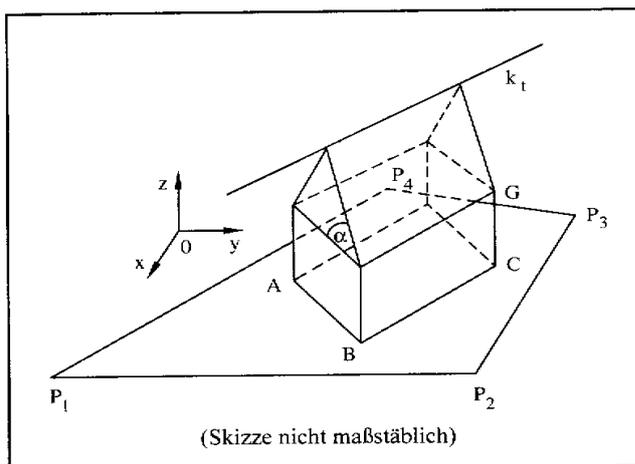


## 8. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2024/25; Analytische Geometrie (I)

Abgabe: 20.01.2025

### 1. Aufgabe:

Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine  $P_1(25; 0; 0)$ ,  $P_2(x_2; y_2; 0)$ ,  $P_3(-2; 36; 0)$  und  $P_4(-5; 15; 0)$  markiert ( $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$ ). Die Grenzsteine  $P_2$  und  $P_4$  liegen achsensymmetrisch zur Diagonale  $\overline{P_1P_3}$ .



- a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines  $P_2$ .  
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt? (6 BE)

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden. Der Punkt  $C(4; 33; 0)$  ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte. Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite  $\overline{AB} = 10 \text{ m}$  und eine Länge  $\overline{BC} = 15 \text{ m}$ . Die beiden Rechtecke des Daches liegen in Ebenen

$$E_t: 3tx + 4ty + 25z = 144t + 200 \quad \text{bzw.} \\ F_t: 3tx + 4ty - 25z = 94t - 200 \quad (t \in \mathbb{R}; t > 0).$$

Der Dachneigungswinkel  $\alpha$  wird durch den Parameter  $t$  beeinflusst (siehe Skizze).

- b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe  $\overline{CG}$  jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters  $t$  unabhängig ist, und berechnen Sie diese. (3 BE)
- c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen  $E_5$  bzw.  $F_5$ .  
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden  $k_5$ .  
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen  $E_5$  und  $F_5$  orthogonal zueinander sind.  
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.  
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum. (5 BE)

- d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel  $\alpha$  verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muss dieser Winkel zwischen einschließlich  $30^\circ$  und  $45^\circ$  liegen. Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von  $t$ .



e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, dass die Grenzsteine  $P_1$ ,  $P_3$  und  $P_4$  gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge. Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann.

## 2. Aufgabe:

2.) Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind die Ebene

$$E: 2x + z - 3 = 0$$

und für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Gerade

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Für welchen Wert von  $t$  ist die Gerade  $g_t$  parallel zu  $E$ ?  
Ist  $g_t$  für dieses  $t$  in  $E$  enthalten?  
Berechnen Sie für alle übrigen Werte von  $t$  den Schnittpunkt  $S_t$  von  $E$  und  $g_t$ .  
Bestimmen Sie den Wert von  $t$ , für den  $g_t$  senkrecht zu  $E$  ist!

- b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden  $g_t$  mit der Geraden

$$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß der Vektor  $\begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$  orthogonal zu den Richtungsvektoren von  $g_t$  und  $h_t$  ist.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E_t$ , die die Geraden  $g_t$  und  $h_t$  enthält.  
Für welche Werte von  $t$  geht diese Ebene durch den Ursprung?

- c) Für  $t = -2$  ist  $E_{-2}$  durch die Koordinatengleichung  $2x - z = 1$  gegeben. Berechnen Sie den Winkel zwischen  $E$  und  $E_{-2}$ .  
Zeigen Sie, daß jeder Punkt der Ebene  $x = 1$  von  $E$  den gleichen Abstand hat wie von  $E_{-2}$ .