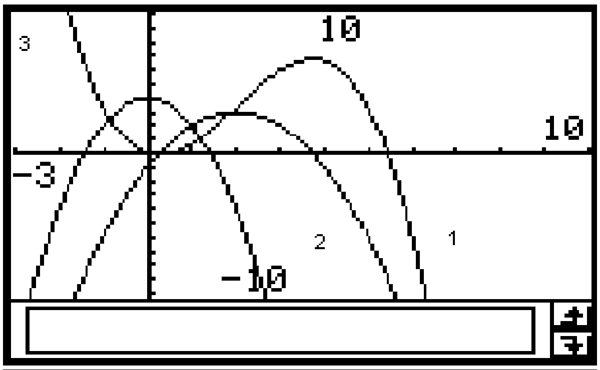
5. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2024/25; Ganze und gebrochene rationale Funktionen

Abgabetermin: 11.11.2024

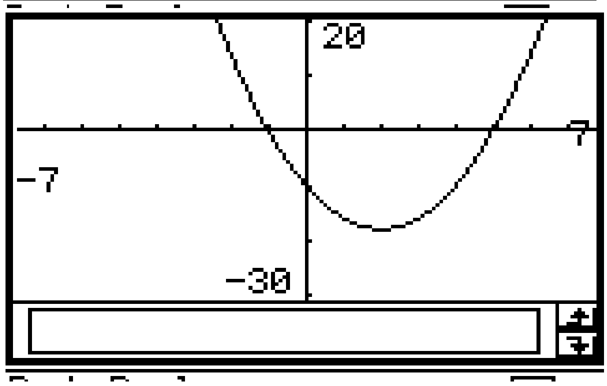
1. Wiederholen Sie, wie sich folgende Eigenschaften von Funktionen untersuchen lassen: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y– Achse, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Symmetrie, Monotonie, Extrem –und Wendepunkte. Welche Besonderheiten ergeben sich für ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen?

2. Begründen Sie unter der Verwendung von Funktionseigenschaften. Wie viele Nullstellen, Extrema bzw. Wendepunkte kann ein Polynom 3.Grades minimal/maximal besitzen.

3. In der oberen rechten Abb. sind die Graphen einer Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt. Geben Sie an, welche der drei Kurven (1,2 oder 3) den Graphen von f und welche den Graphen von F darstellt.



4. In der unteren Abb. ist der Graph f'(x) einer Funktion f(x) gegeben. Geben Sie für f(x) Folgendes an und begründen Sie: Extrem- und Wendestellen, Monotonieverhalten. Begründen Sie, warum sich aus dem Graph von f '(x) (nicht) eindeutig der Graph von f(x) herleiten lässt.



5. Geben Sie eine Funktion an, die
   a) ganzrational vom Grad 2 ist und genau ein lokales Maximum besitzt.
   b) ganzrational vom Grad 4 ist und genau ein lokales Minimum besitzt.

6. Beweisen Sie für ganzrationale Funktionen f:
   a) Ist f vom Grad 2, so hat f genau eine Extremstelle
   b) Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n-1 Extremstellen.

7. Die Steighöhe h eines im luftleeren Raum senkrecht nach oben geworfenen Gegenstandes lässt sich durch folgendes h - t – Gesetz beschreiben:

   $$h(t)=v_0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \; v_0 \; in \; \frac{m}{s}, t \; in \; s, g=9{,}81\frac{m}{s^2}$$

   Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit.
   a) Berechnen Sie die maximal erreichte Höhe des Gegenstandes für v_0 = 12m/s.
   b) Wie lange dauert es, bis der Gegenstand wieder die Ausgangshöhe erreicht?

8. Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen 3.Grades, deren Graph
   a) punktsymmetrisch zum Ursprung ist und für x = 2 einen Extrempunkt hat.
   b) im Ursprung einen Wendepunkt mit der Wendetangente y = x hat.

9. Gegeben ist eine Funktionenschar f_t. Für welchen Wert von t wird die y- Koordinate des Minimums am kleinsten?

   $$f_t(x)=x+\frac{t^2}{x}+\frac{8}{t} \; t\in R; t\neq 0$$

10. Ein Patient wird mit Fieber in ein Krankenhaus eingeliefert und behandelt. Die Temperaturkurve wird durch die Funktion $\vartheta(t)$ modelliert:

$\vartheta(t) = -\frac{1}{16}t^4 + \frac{7}{12}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + \frac{9}{4}t + 39 \quad t \in [0;5]$ *in Tagen*; ϑ in °C

a) Welche Temperatur hat der Patient bei der Einlieferung ins Krankenhaus? Wann wird die höchste Temperatur gemessen? Wie hoch ist diese? Welcher Wert ergibt sich am 5.Tag?

b) Interpretieren Sie den Verlauf der Fieberkurve.

11. An einem Tag im Frühherbst wird die Oberflächentemperatur ϑ_o eines Sees gemessen. Der Temperaturverlauf wird durch die Funktion ϑ_o modelliert:

$\vartheta_o(t) = -\frac{1}{300}\left(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700\right) \quad t \in (0;24]$ *in Stunden*; ϑ_o in °C. Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen und die Steigung der Wendetangente und deuten Sie diese für den See.

12. Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = \frac{2x^2 - (2t+1)x}{x-t}$. Welche Asymptoten hat diese Schar?

13. Weisen Sie nach, dass jede der Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{ax^2 - 2ax - x + 4}{2ax - 2}$ dieselbe schräge Asymptote besitzt und geben Sie deren Gleichung an.