Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

Abgabetermin
28.10.2024

4. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2024/25; Integralrechnung

1. Wiederholen Sie die Begriffe *Stammfunktion, unbestimmtes Integral*, *bestimmtes Integral und uneigentliches Integral*! Ordnen Sie diese Begriffe den folgenden Aufgaben zu und ermitteln Sie die Integrale!

a) $\int (t^3+1)\cdot t^2 dt$ b) $\int \frac{-1}{3x\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{3x}{6x^2-8x}dx$ d) $\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{(2x+5)^2}dx$

e) $\int_{0}^{\pi} (\sin^2 x)dx$ f) $\int_{0}^{\pi} (\sin\frac{\pi}{2}+1)dx$ g) $\int \frac{3}{\sqrt{1-3x}}dx$ h) $\int \frac{x^3-6x^2}{x^3}dx$

i) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x^5}dx$ j) $\int (e^{3x-1})dx$ k) $\int (e^x)^2 dx$ l) $\int_{0}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

2) Berechnen Sie a (a>1) so, dass gilt: $\int_{1}^{a} \frac{1}{3x-1}dx = 0{,}1$.

3) Zeigen Sie rechnerisch, dass $F_a(x) = e^{ax}(\frac{2x-1}{a} - \frac{2}{a^2})$ eine Stammfunktion von f_a mit $f_a(x) = (2x-1)e^{ax}$ $(a \in R_+)$ ist.

4) Welche Parabel K: $y = c - x^2$ $(c > 0)$ schließt mit der x- Achse eine 2 FE große Fläche ein?

5) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = ax^3+bx^2+cx$ hat bei x=1 einen Hochpunkt, bei x=2 einen Wendepunkt und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt 9 FE beträgt.
Ermitteln Sie f rechnerisch.

6) Von welcher Funktion f ist $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ eine Stammfunktion?
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im 1.Quadranten, die von f, einer Asymptote und den Geraden g: x = 0 und h: x = z (z > 0) begrenzt wird. Untersuchen Sie, ob dieser Flächeninhalt für $z \to \infty$ einen Grenzwert hat!

7) Der Graph der Funktion f_k mit $f_k(x) = k\sqrt{x} - 3x$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche.
a) Berechnen Sie den Inhalt. Für welchen Wert von k ergibt sich der Inhalt 8 FE?
b) Die Fläche mit 8 FE rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers?

8) Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \left(\frac{x}{t}+1\right)\cdot e^{t-x}$; $x \in R$.
a) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und der Ableitungsfunktion f_1' im Bereich [-1 ; 4] in ein gemeinsames Koordinatensystem. (1 LE =1cm)
b) Zeigen Sie, dass für jedes t > 0 das Schaubild von f_t mit dem Schaubild von f_t' genau einen Punkt gemeinsam hat.
c) Die Graphen von f_t und f_t' schneiden aus der Geraden g : x = 1 eine Strecke aus.
Für welchen Wert von t ist die Länge dieser Strecke am kleinsten?
d) Das Schaubild K_1, die x –Achse und die Gerade g : x = u mit u > -1 schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt A(u) und den $\lim_{u \to \infty} A(u)$.