



2. Prüfungskomplex - Ma-Leistungskurs 2024/25; Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

Abgabetermin:
09.09.2024

Wiederholen Sie!

- Begriffe Zahlenfolgen: Schranken, Grenzen und Grenzwert/konvergent und divergent/
rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift.

- Begriffe Funktionen: Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ und deren grafische Bedeutung

- Stetigkeit an einer Stelle, im Intervall und im Definitionsbereich

Siehe dazu auch: http://www.frank-kaden.com/homepage/php/karte_a1.php und folgende

1. Gegeben ist $(a_n) = \left(\frac{3n+21}{2n-1} \right) \quad n \geq 1$

- Stellen Sie die ersten 5 Glieder der Zahlenfolge(ZF) grafisch dar.
- Weisen Sie nach, dass die Zahl 2,5 kein Glied der ZF ist.
- Zeigen Sie, dass 2 keine Schranke der ZF ist.
- Geben Sie die obere Grenze und eine untere Schranke an.
- Untersuchen Sie die ZF auf Konvergenz.
- Überprüfen Sie, ob die ZF arithmetisch oder geometrisch ist.

2. Berechnen Sie!

a) $\sum_{i=1}^7 2^i$ b) $\sum_{k=2}^{10} (k-3)$ c) $\sum_{n=1}^4 n^3 + \sum_{n=5}^8 n^3 - \sum_{n=1}^8 n^3$

d) die Summe aller ungeraden Zahlen kleiner als 400 (lösen Sie mit Hilfe des TW)

3. Stellen Sie folgende Summe mit Hilfe des Summenzeichens dar und berechnen Sie.
 $180+130+80+30+\dots-820=$

4. Berechnen Sie die Grenzwerte für die entsprechende Stelle x_0 und geben Sie deren grafische Bedeutung an.

a) $f(x)=x^2+3x+2$; $x_0 = 0$

b) $f(x)=\frac{2x+x^2}{x}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$; $x_0 = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; \text{ für } & x < 1 \\ \lg x; \text{ für } & x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1$

e) $f(x) = \left(\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \right)^3 ; x_0 = -2$



5. Ermitteln Sie (falls vorhanden) waag., senkr. und schräge Asymptoten.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ b) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}$ c) $f(x) = 3^{-x} \cdot 4^x$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$ f) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

6. Untersuchen Sie, ob $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist. Begründen Sie.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$; $x_{01} = 1$; $x_{02} = -1$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = -2$; $x_{03} = 4$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2; \text{ für } & x \leq 1 \\ \sqrt{x}; \text{ für } & x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1$

7. Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x)$ in \mathbb{R} stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1; \text{ für } & x \leq 1 \\ tx + 1 & ; \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

8. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ in \mathbb{R} stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x}; & x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases} \quad \text{Hinweis: Es gilt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$