**Lösungen zu Übungsaufgaben S. 248 ff, Aufgaben 1, 3 und 4**

1 a) Die Wahrscheinlichkeit für schwarz beträgt $p = \frac{5}{8}$.

$P(A) = (\frac{5}{8})^4 \approx 0{,}1526$ ; $P(B) = (\frac{5}{8})^3 \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 \approx 0{,}3662$ ;

$P(C) = (\frac{3}{8})^3 \cdot \frac{5}{8} \approx 0{,}0330$.

b) $P(X=1) = \frac{3}{8}$ ; $P(X=2) = \frac{15}{56}$ ; $P(X=3) = \frac{5}{28}$ ; $P(X=4) = \frac{3}{28}$ ;

$P(X=5) = \frac{3}{56}$ ; $P(X=6) = \frac{1}{56}$ . $E(X) = 2{,}25$ .

c) $H_0$: $p = 0{,}4$. Rechtsseitiger Test ergibt:
$K = \{ 12; \ldots ;20 \}$ .
Für $p = 0{,}6$ erhält man: $\beta = P(X \le 11) = 0{,}4044$.

d) Es kann die Näherung verwendet werden:
$K = \{ 41; \ldots ;80 \}$. Da $23 \notin K$, muß die Hypothese beibehalten werden. Für $p = 0{,}6$ erhält man: $\beta = 0{,}0336$.

3 a) $\binom{38}{7} = 12620265$ Möglichkeiten, den Lottoschein auszufüllen.

$\binom{31}{7} = 2629575$ Möglichkeiten, keine Gewinnzahl anzukreuzen.

b) X: Anzahl der Richtigen. Auf 8 Dezimalen ergibt sich:

| | |
|---|---|
| $P(X=0) \approx 0{,}20836146$ | $P(X=1) = 0{,}40838847$ |
| $P(X=2) = 0{,}28273048$ | $P(X=3) = 0{,}08726249$ |
| $P(X=4) = 0{,}01246607$ | $P(X=5) = 0{,}00077376$ |
| $P(X=6) = 0{,}00001719$ | $P(X=7) = 0{,}00000008$ |

c) $$P(\text{"6 Richtige mit ZZ"}) = \frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{30}{0}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{38}{7}} = 0{,}00000055\ ;$$

$$P(\text{"6 Richtige ohne ZZ"}) = \frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{30}{1}\cdot\binom{1}{0}}{\binom{38}{7}} = 0{,}00001664$$

Bemerkung: Addiert man beide Wahrscheinlichkeiten, ergibt sich $P(X=6)$ aus Teilaufgabe b).

d) Man berechnet den Erwartungswert aus Teilaufgabe b):
$E(X) \approx 1{,}29$ ; also etwas mehr als eine richtige Zahl pro Spiel.

e) $X = \begin{cases} 1, & \text{falls bei 1 Ziehung eine gerade Zahl gezogen wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Y: Anzahl der geraden Zahlen bei 207 Ausspielungen.
X ist näherungsweise $B_{7;0,5}$-verteilt. Y ist näherungsweise $B_{207\cdot 7;0,5}$-verteilt. $\mu_Y = 724{,}5$ und $\sigma_Y \approx 19$.

$[\mu-\sigma;\mu+\sigma] = [705;744]$ ; $[\mu-2\cdot\sigma;\mu+2\cdot\sigma] = [686;763]$.

745 liegt im $2\cdot\sigma$-Intervall.

Bemerkung: X ist hypergeometrischverteilt mit $\mu_X = 3{,}5$ und $\sigma_X \approx 1{,}21$. Bei 207 Ausspielungen beträgt $\mu_Y = 724{,}5$ und $\sigma_Y \approx 17{,}42$. Auch nun liegt 745 im $2\cdot\sigma$-Intervall.

4 a)

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$\mu_X = 5$ ; $\sigma_X = 1{,}58$.

b) Der Erwartungswert für den Gewinn von A beträgt:
$\mu = \frac{3}{16} > 0$ ; also ist das Spiel nicht fair.
Geänderter Einsatz: Da A pro Spiel bei einem Einsatz von 1 DM durchschnittlich $\frac{3}{16}$ DM gewinnt, ist das Spiel bei einem Einsatz von $(1+\frac{3}{16})$ DM ≈ 1,19 DM fair; d.h. E(Gewinn) = 0 DM.

c) $P(A) = (\frac{1}{4})^4 \approx 0{,}0039$ ; $P(B) = (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot \binom{4}{2} \approx 0{,}2109$ ;
$P(C) = 4!/4^4 \approx 0{,}0938$ ; $P(D) = 4 \cdot [(\frac{1}{4})^4 + 4 \cdot (\frac{1}{4})^3 \cdot \frac{3}{4}] \approx 0{,}2031$.

d)

| $y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y=y_i)$ | $\frac{16}{64}$ | $\frac{36}{64}$ | $\frac{11}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

$\mu_Y = \frac{127}{64} \approx 2$ (Würfe).

e) X: Anzahl der Einsen. X ist $B_{n;0,25}$-verteilt.
Mit Tschebyscheff:
$P(|\bar{X} - p| < c) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot n \cdot c^2} \geq 0{,}9$ ; daraus $n \geq 25000$.

Mit Normalverteilung:
$P(|\frac{X}{n} - \frac{\mu}{n}| \leq 0{,}01) = P(|X - \mu| \leq 0{,}01 \cdot n) \Longrightarrow 2 \cdot \phi(\frac{0{,}01 \cdot n}{\sigma}) - 1 \geq 0{,}9$.
Daraus $n \geq 5071$.

f) $X_i$: Anzahl der Würfe, welche die Augenzahl i ergeben haben;
$p_i$: Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl i ; $1 \leq i \leq 4$.
$X_i$ ist $B_{2000;0,25}$-verteilt, mit $\mu = 500$ und $\sigma \approx 19{,}4$.

$X_i$ ist $B_{2000;0,25}$-verteilt, mit $\mu = 500$ und $\sigma \approx 19{,}4$.
Es muß für jedes i $H_0$: $p_i = 0{,}25$ getestet werden.
Es kann die Näherung verwendet werden. Ein zweiseitiger Test ergibt für jedes i: $K = \{0; \ldots ;461\} \cup \{540; \ldots ;2000\}$.
Augenzahl 1: $460 \in K$ ; Augenzahl 2: $507 \notin K$ ;
Augenzahl 3: $518 \notin K$ ; Augenzahl 4: $515 \notin K$.
Wegen des Ergebnisses bei der Augenzahl 1, müßte man das Tetraeder (theoretisch) als nicht ideal annehmen. Das Ergebnis liegt jedoch sehr knapp an der Ablehnungsgrenze, daß es angebracht ist, den Test zu wiederholen.