

10. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2018/19;
Winkelfunktionen -Lösungen

2)

	$f(x) = 3 \sin(2x)$	$f(x) = -\cos(px)$	$f(x) = 2 \sin(4x+2)$
$f'(x) =$	$6 \cos(2x)$	$p \sin(px)$	$8 \cos(4x+2)$
$f''(x)$	$-12 \sin(2x)$	$p^2 \cos(px)$	$-32 \sin(4x+2)$
DB =	$\{x x \in \mathbb{R}\}$	$\{x x \in \mathbb{R}\}$	$\{x x \in \mathbb{R}\}$
WB =	$\{y y \in \mathbb{R}, -3 \leq y \leq 3\}$	$\{y y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y y \in \mathbb{R}, -2 \leq y \leq 2\}$
$p = \frac{2\pi}{ b }$	$p = \pi$	$p = 2$	$p = \frac{1}{2}\pi$
Einfluss der Parameter	Streckung in y-Richtung Stauchung in x-Richtung	Keine Streckung in y-Richtung Stauchung in x-Richtung Spiegelung an der x-Achse	Streckung in y-Richtung Stauchung in x-Richtung Verschiebung um 0,5 in x-Richtung nach links

3) zB. a) $f(x) = 3 \sin(2x)$ b) $f(x) = -\cos(x+1)$

4) a) $p = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow [0; \pi]$ Nst.: $0 = -2 \sin(2x)$

$$0 = \sin(2x) \quad (\text{Nst. der sin-Funktion bei } k \cdot \pi) \\ k \cdot \pi = 2x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$k \cdot \frac{\pi}{2} = x \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{\pi}{2}; x_3 = \pi$$

Extrempunkte : $f'(x) = -4 \cos(2x) = 0$ n.B.

$$\cos(2x) = 0 \quad (\text{Nullst. Der cos-Funktion bei } (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$2x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4} \rightarrow x_{E1} = \frac{\pi}{4}; x_{E2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$f''(x) = 8 \sin(2x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 > 0 \rightarrow \text{lok. Min.} \quad T\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -8 < 0 \rightarrow \text{lok. Max.} \quad H\left(\frac{3\pi}{4}; 2\right)$$

Wendepunkte : n. B. $f''(x) = 8 \sin(2x) = 0$

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

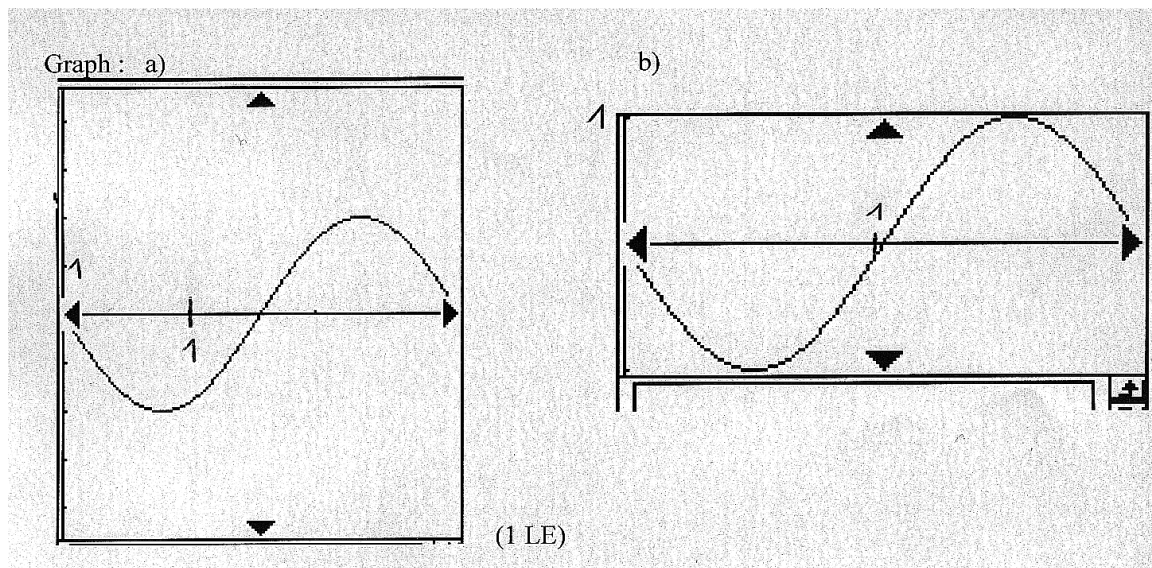
$$\rightarrow x_W = 0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

$$\rightarrow W_1(0; 0); W_2\left(\frac{\pi}{2}; 0\right), W_3(\pi; 0)$$

h. B $f'''(x) = -16 \cos(2x)$

$$f'''(0) = -16, f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16 \neq 0$$

$$f'''(\pi) = -16$$



b) $p = \frac{2\pi}{3} \rightarrow [0; \frac{2\pi}{3}]$; Nst. $0 = \sin(3x - \pi)$

$$x = \frac{1}{3}(k\pi - \pi) \rightarrow x_N = 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$$

Extrempunkte : $f'(x) = 3 \cos(3x - \pi) = 0$ n.B.

$$x = \frac{\pi}{6}(2k+1) - \frac{\pi}{3} \rightarrow x_E = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$$

h. B. $f''(x) = -9 \sin(3x - \pi)$

$$f''(\frac{\pi}{6}) = 9 > 0 \rightarrow \text{lok. Min. } T(\frac{\pi}{6}; -1)$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -9 < 0 \rightarrow \text{lok. Max. } H(\frac{\pi}{2}; 1)$$

Wendepunkte : n. B. $f''(x) = -9 \sin(3x - \pi) = 0$ Wendestellen und Nullstellen stimmen Überein

h. B. $f'''(x) = -27 \cos(3x - \pi)$

$$f'''(0) = 27; f'''(\frac{\pi}{3}) = -27; f'''(\frac{2\pi}{3}) = 27 \neq 0$$

$$\rightarrow W_1(0; 0); W_2(\frac{\pi}{3}; 0); W_3(\frac{2\pi}{3}; 0)$$

5) a) $f_2(x) = 3 \cos(2x)$; Nst. $0 = 3 \cos(2x)$ $p = \pi$

$$2x = (2k+1) * \frac{\pi}{2}$$

$$x_N = (2k+1) * \frac{\pi}{4}$$

Extremstellen : n. B. $f'(x) = -6 \sin(2x) = 0$

$$2x = k\pi$$

$$x_E = k * \frac{\pi}{2}$$

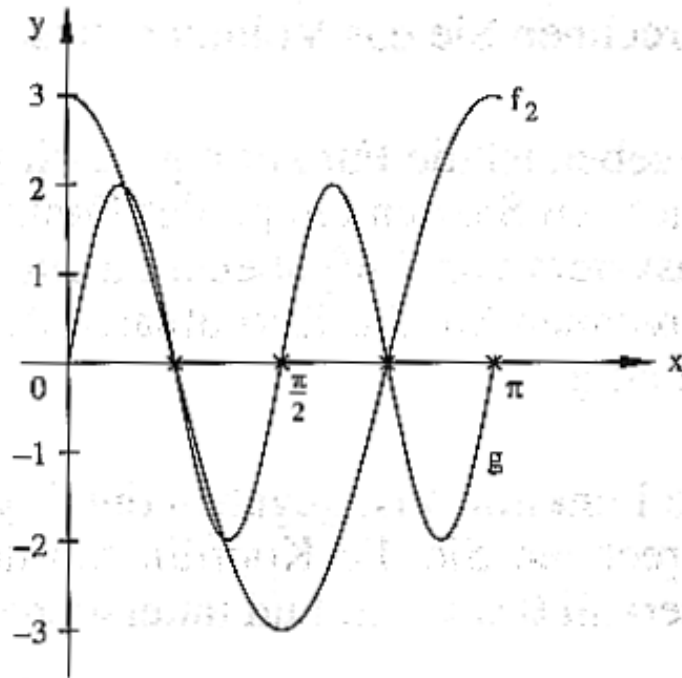
h. B. $f''(x) = -12 \cos(2x)$

$$f''(k * \frac{\pi}{2}) = -12 * \cos(k\pi);$$

Fallunterscheidung : wenn k gerade, also 2k ergibt dies $-12 \rightarrow$ lok. Max. $\rightarrow H(k\pi; 3)$

wenn k ungerade, also 2k+1 folgt $+12 \rightarrow$ lok. Min. $\rightarrow T((2k+1)\frac{\pi}{2}; -3)$

Graph :



Tangente in $P \left(\frac{\pi}{4}; 0 \right)$: $t: y = mx + n$; $m = f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -6$

$$0 = -6 \frac{\pi}{4} + n \quad ; \quad n = \frac{3\pi}{2}$$

$$\rightarrow t: y = -6x + \frac{3\pi}{2}$$

b) ges. $A_t = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} \frac{t^2 + 2}{2} \cos(tx) \, dx = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}$ (TR, Main, Berechnung, \int)

ges. t für minimale Fläche

Zielfunktion: $A(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}$; hier lässt der Operator auch die reine TR- Lösung zu

TR, Grafik, Minimum

$$t = \sqrt{2}$$

ges Volumen von A_2 : $V = \pi * \int_0^{\frac{\pi}{4}} [3 \cos(2x)]^2 \, dx = \frac{9}{8} \pi^2 \text{ VE}$; (TR, Main)

c) S ist gemeinsamer Punkt, wenn die Koordinaten von S beide Gleichungen erfüllen:

$$g\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\pi + 2k\pi\right) = 0 \quad (\text{Nullstellen der Sinusfunktion bei allen Vielfachen von } \pi)$$

$$f_2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad (\text{Nullstellen der Kosinusfunktion})$$