Lösungen Prüfungskomplex 3 – Mathe Leistungskurs 2018/19

2.A) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{(x_0+h)^3 - x_0{}^3}{h}$ B) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h}$ C) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$

3. A) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

B) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \ln\left(1 + \dfrac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}} = 1$

C) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$

4.

$$f_1'(x) = 7x^6 - 4ax^3 - ax^{-2}$$
$$f_1''(x) = 42x^5 - 12ax^2 + 2ax^{-3}$$

$$f_2'(x) = -2a(x-2)^{-3}$$
$$f_2''(x) = 6a(x-2)^{-4}$$

$$f_3'(x) = -e^{2-x} + 2ax^{a-1}$$
$$f_3''(x) = e^{2-x} + 2a(a-1)x^{a-2}$$

$$f_4'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$$
$$f_4''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$f_5'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x+3)$$
$$f_5''(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3\sin(3x+3)$$

$$f_6'(x) = -\frac{1}{x^2} + a - \frac{a}{2\sqrt{ax}}$$
$$f_6''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(ax)^3}}$$

5. Lösungsweg:
- Bilden der ersten, zweiten und dritten Ableitung
- (1) Notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$
- (2) Hinreichende Bedingung für Extremstellen $f''(x_E) \neq 0$
- (3) Notwendige Bedingung für Wendstellen $f''(x) = 0$
- (4) Hinreichende Bedingung für Wendstellen $f'''(x_W) \neq 0$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$\underline{f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2}$$
$$= -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$
$$= \underline{e^{-x^2}(-2 + 4x^2)}$$

$$f'''(x) = -2x e^{-x^2}(-2 + 4x^2) + e^{-x^2}(8x)$$
$$= e^{-x^2}(-8x^3 + 4x + 8x)$$
$$= \underline{e^{-x^2}(-8x^3 + 12x)}$$

1) $f'(x) = 0 \qquad 0 = -2x e^{-x^2}$

$\underline{x_E = 0}$, da e^{-x^2} für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht Null wird.

2) $f''(0) = e^0(-2+0) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{P_{Max}(0; 1)}$

3) $f''(x) = 0 \qquad 0 = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$

$0 = -2 + 4x^2$

$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \underline{x_{W1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}}\ ; \quad \underline{x_{W2} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$

4) $f'''\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\left(-8\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^3 + 12\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-4\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 12\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ = oder $= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{\tfrac{64}{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{32} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \underline{\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4\sqrt{2}} \neq 0 \qquad = \underline{\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} \neq 0$

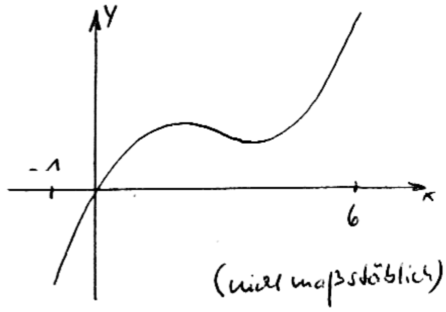
$\underline{P_{W1}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ; e^{-\frac{1}{2}}\right)}$ oder $P_{W1}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$f'''\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = -4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$

$\underline{P_{W2}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ; e^{-\frac{1}{2}}\right)}$

6. geg.: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$

a) $DB=\{x;\ x\in R\}$; $WB=\{y;\ y\in R\}$



Nst: $0=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x \quad |\cdot 3$

$0=x^3-9x^2+24x$

$0=x(x^2-9x+24)$

$\underline{x_{0_1}=0}$ keine weiteren

b) Tangente / Normale bei $x_0=3$

T: $f'(x)=x^2-6x+8$

$f'(3)=9-18+8=\underline{-1=m}$ ⇒ Tang. (halbfertig): $y=-x+n$

P(3|6) einsetzen:

$y=-x+n$

$6=-3+n$ ⇒ $\underline{n=9}$ ⇒ Tang. (fertig): $\underline{\underline{y=-x+9}}$

N: $\underline{\bar{m}}=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-1}=\underline{1}$ ⇒ Norm. (halbfert.) $y=x+n$

P(3|6) einsetzen:

$y=x+n$

$6=3+n$ ⇒ $n=3$ ⇒ Norm. (fertig): $\underline{\underline{y=x+3}}$

c) $f'(x)=0=x^2-6x+8$

$0=(x-2)(x-4)$ ⇒ $x_{E_1}=2$; $x_{E_2}=4$

⇒ $\underline{\underline{P_{E_1}(2|6,\bar{6});\ P_{E_2}(4|5,\bar{3})}}$

d) $f'(s)=3=m$

⇒ $\tan\alpha=3$ ⇒ $\alpha=\arctan(3)\approx\underline{\underline{71{,}6^\circ}}$

e) $y=x+3$ schneidet f:

$x+3=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$

Lösung z.B. mit GTR, GRAPH: Y1: $x+3$
Y2: $\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$

DRAW, GSOLV, ISCT: $S_1(0{,}55|3{,}55)$
⇒ : $S_2(3|6)$ (↑b)
⇒ : $S_3(5{,}45|8{,}45)$

f) $y=mx$ schneidet ebenfalls f:

$mx=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x \quad |-mx$

$0=\frac{1}{3}x^3-3x^2+(8-m)x$

$0=x\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}x^2-3x+8-m\right)}$

$\underline{\underline{x_{S_1}=0}}$

$0=x^2-9x+3(8-m)$

$0=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{81}{4}-3(8-m)}_{D}}$

falls $D=0$ ⇒ 2 Schnittpunkte
falls $D<0$ ⇒ 1 Schnittpunkt (x_{S_1})
falls $D>0$ ⇒ 3 Schnittpunkte
⇒ $D=0=\frac{81}{4}-24+3m$

$m=\frac{5}{4}$ ⇒ 2 S.
$m<\frac{5}{4}$ ⇒ 1 S.
$m>\frac{5}{4}$ ⇒ 3 S.

und **für m = 8** ex. genau ein Schnittpunkt und ein Berührpunkt

7. a) $P_y(0 \mid -0{,}5)$

Nst: $x_0 = 0{,}5$

Extr: $P_T(-1 \mid -1)$; $P_H(2 \mid 0{,}5)$

WP: $P_{W1}(0{,}25 \mid -0{,}2)$

$P_{W2}(-2 \mid -0{,}8)$

$P_{W3}(3 \mid 0{,}4)$

b) für $f'(x)$:

Nst: (Extremstellen von $f(x)$) $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = 2$

x-Werte für $f'(x) > 0$: $-1 \leqq x \leqq 2$ (Anstieg bei $f(x) > 0$)

Extrema: Wendestellen von $f(x)$ sind Extremstellen bei $f'(x)$ $\rightsquigarrow$ 3 lokale Extrema