1 Übung Geometrie zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

Lehrbuch KLETT Mathematik Leistungskurs S. 260/7

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Gesucht: Koordinatengleichungen von E_1 und E_2, $\sphericalangle(E_1, E_2)$

Lösung: Zuerst werden die Punktkoordinaten aus der Zeichnung ermittelt:
$A(32|12|8), B(12|12|8), C(12|20|8), D(32|6|12), E(6|6|12), F(6|20|12)$
Die Ebenengleichungen $E_1(A, B, D)$ und $E_2(B, C, F)$ können jetzt aufgestellt werden (zuerst mittels 3-Punkte Form eine Parametergleichung:

$$E_1(A,B,D): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 32 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2(B,C,F): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus den jeweiligen Spannvektoren erhalten wir mittels Kreuzprodukt die Normalenvektoren der gesuchten Ebenen:

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt: } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit den Normalenvektoren können wir bereits halbfertige Koordinatengleichungen aufschreiben:
$E_1(A, B, D): 2y + 3z = d$ bzw. $E_2(B, C, F): 2x + 3z = d$
Setzt man nun noch in E_1 z.B. A ein und in E_2 z.B. B, dann erhält man:
$E_1(A, B, D): 2y + 3z = 48$ bzw. $E_2(B, C, F): 2x + 3z = 48$

Schließlich bestimmen wir noch mittels eines GTR-Programms den Winkel:
$\cos\sphericalangle(E_1, E_2) = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \left|\frac{\overrightarrow{n_1} o \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|$ und wir erhalten den Winkel $\sphericalangle(E_1, E_2) = 46,19°$

1.2.2 zu b):

Gesucht: Länge der Dachkehle $|\overrightarrow{BE}|$ und $\sphericalangle(g(B, E), xy - Ebene)$

Lösung: Länge der Dachkehle (trivial): $|\overrightarrow{BE}| = 2\sqrt{22}m \approx 9,4m$

Schließlich bestimmen wir noch mittels eines GTR-Programms den Winkel:
$\sin \sphericalangle(g(B,E), xy - Ebene) = \sin \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k}) = \left|\frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{k}|}\right|$ und
wir erhalten den Winkel $\sphericalangle(g(B,E), xy - Ebene) = 25,24°$

1.2.3 zu c):

Gesucht: Antennenfußpunkt G, Sichtbarkeit der Antennenspitze H von P aus

Lösung: Da die Antenne senkrecht auf der xy-Ebene steht gilt:

$$g(H,G) : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist leicht einzusehen: g(H,G) schneidet E_2 in G. Wir lösen das Lageproblem, indem wir g in E_2 einsetzen:
Aus $2(8) + 3(16 + t) = 48$ folgt $t = -\frac{16}{3}$ und nach Einsetzen in g erhalten wir $G(8|14|\frac{32}{3})$.

Schließlich stellt sich in dieser Aufgabe noch die Frage: Haben wir von P aus freie Sicht auf die Antennenspitze? Nun, dieser Frage gehen wir flugs auf den Grund:

Wir bilden zunächst eine Sichtgerade g(P,H):

$$g(P,H) : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 41 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -33 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Sichtgerade prüfen wir deren Lage zum Haus, insbesondere zur linken Hauswand, die in der xz-Ebene liegt.:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -33 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das LGS und erhalten $s = \frac{1}{3}$ und daraus folgt $P_{xz}(30|0|6)$. Da die z-Koordinate die Höhe des Schnittpunktes der Sichtgeraden mit der Hauswand beschreibt, erkennen wir: Die Sichtgerade durchstößt die Hauswand unterhalb des Dachansatzes (Höhe 8!). D.h., die Antennenspitze ist von P aus nicht zu sehen.

1.2.4 zu d):

Gesucht: Schattenpunkt Q auf der Dachkehle, Schattenpunkt der Antennenspitze auf E_1

Lösung: Nun diese Aufgabe ist etwas knifflig. Zunächst benötigen wir etwas Vorstellungsvermögen für diesen Sachverhalt (siehe Abbildung d_1).

Daraus wird ersichtlich: Der Lichtstrahl $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ und der Antennenvektor $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden mit dem Stützpunkt H eine Schattenebene E_s. Diese schneidet die Dachkehle g(B,E)

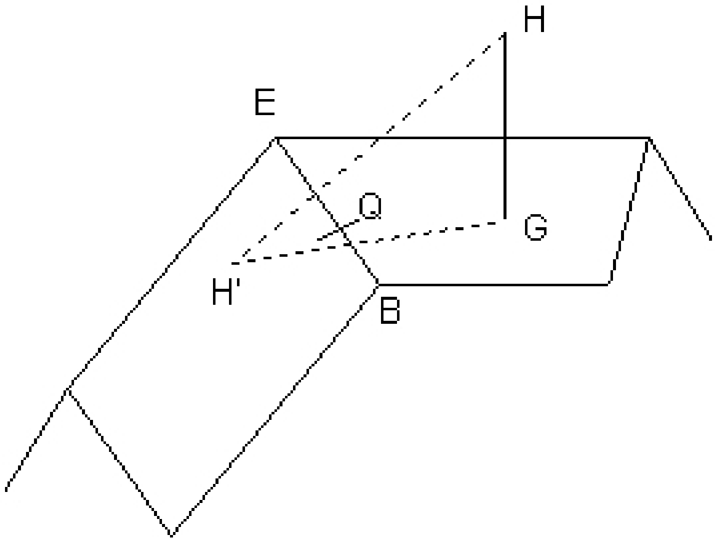

Abb. d_1

in Q. Außerdem durchstößt die Lichtstrahlgerade g(H,H') die Ebene E_1 in H'. Damit wäre der Lösungsweg vorgezeichnet.

Zunächst ermitteln wir Q als Schnittpunkt von E_s und g(B,E):

$$E_s(H, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{u}) : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g(B, E) : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit den bekannten Methoden finden wir $Q(\frac{152}{13}|\frac{152}{13}|\frac{320}{39})$.

Und schließlich finden wir auch mittels bekannter Methoden den Schattenpunkt der Antennenspitze auf E_1 als Durchstoßpunkt der Lichtstrahlgeraden g(H,H') mit der Ebene E_1: $H'(16|9|10)$.