1 Übung Geometrie zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

Lehrbuch KLETT Mathematik Leistungskurs S. 260/6

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Gesucht: Ebene E, die P und $\overline{P}$ als Spiegelpunkte hat.

Lösung: Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P\overline{P}}$ ist ein Punkt der gesuchten Ebene, der Vektor $\overrightarrow{P\overline{P}}$ ist Normalenvektor der Ebene E.

Wir erhalten mit der Mittelpunktsformel für Strecken den Mittelpunkt $M(1|1|1)$ und den Vektor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{P\overline{P}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

bzw. den gekürzten entgegengesetzten Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für die Ebene E notieren wir: $E : 1x + 3y + 2z = d$, nach Einsetzen des Punktes M erhalten wir $d = 6$ und damit die komplette Gleichung für $E : x + 3y + 2z = 6$.

1.2.2 zu b):

Gesucht: Durchstoßpunkt D der Geraden g durch die Ebene E

Lösung: Die Gleichung für g(PQ) lautet:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter setzen wir g in die Koordinatengleichung von E ein (oder nutzen das GTR-Programm LAGEPGE) und erhalten $D(2|0|2)$.

1.2.3 zu c):

Gesucht: Durchstoßpunkt F der zu E orthogonalen Geraden h, die durch Q geht. Außerdem: Abstand $d^*(QF)$, Spiegelpunkt Q' bzgl. E und eine Gleichung der Geraden k(DF).

Lösung: Zunächst benötigen wir die orthogonale Gerade h. Sie bildet sich mit Hilfe des Punktes Q und dem Normalenvektor von E. Also notieren wir:

$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jetzt der Durchstoßpunkt F. Das ist ebenfalls trivial.
h in E einsetzen, der Parameter s beträgt -2 (oder GTR verwenden).
Wir erhalten den Punkt $F(0|2|0)$.
Und schon folgt der nächste Schritt:
$d^*(QF) = \sqrt{(0-2)^2 + (2-8)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.
Nun zum Spiegelpunkt:
Unser Ansatz lautet ganz trivial: $\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{FQ'}$. Nach Einsetzen der bekannten Koordinaten erhält man: $Q'(-2|-4|-4)$.
Und zuletzt die Gleichung der Geraden k, welche durch D und F verläuft:

$k: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Fertig!

1.2.4 zu d):

Gesucht: Winkel zwischen g und E
Mit der Formel $\sin \sphericalangle(g, E) = \left| \frac{\overrightarrow{a} o \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{n}|} \right|$ erhalten wir den Winkel $\sphericalangle(g, E) = 65,16°$

Gesucht: Winkel zwischen g und xy-E
Mit der Formel $\sin \sphericalangle(g, xy-E) = \left| \frac{\overrightarrow{a} o \overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{k}|} \right|$ erhalten wir den Winkel $\sphericalangle(g, xy-E) = 14,04°$

Analog erhalten wir: $\sphericalangle(g, xz-E) = 76°$ und $\sphericalangle(g, yz-E) = 0°$

1.2.5 zu e):

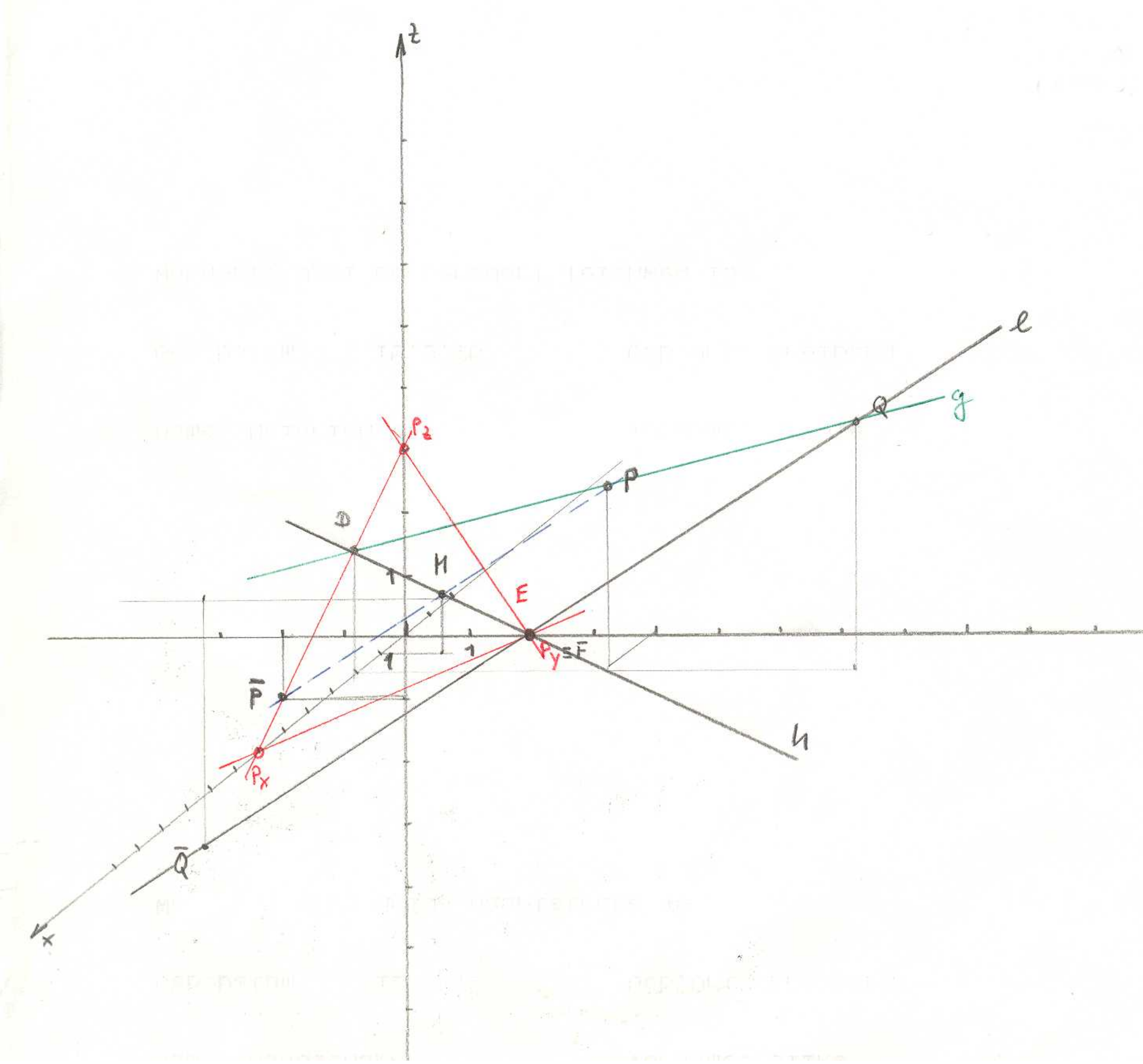

Abb. e_1