1 Übung Geometrie zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

Lehrbuch KLETT Mathematik Leistungskurs S. 259/1

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Wir zeigen: Die Gleichungen $x - 3y - 2z = -8$ bzw. $2x + y + 3z = 12$ sind Koordinatengleichungen der Ebenen E_1 bzw. E_2.

Nachweis: A,B und C erfüllen die Gleichung für E_1 (trivial, hier nicht weiter ausgeführt!)

Nachweis: P und P' sind Spiegelpunkte von E_2, d.h. der Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ liegt auf E_2 und es gilt: $\overrightarrow{PP'} = r\overrightarrow{n}$, wobei $\overrightarrow{n}$ Normalenvektor von E_2 ist. $\overline{PP'}$ hat den Mittelpunkt bei $M(3|3|1)$ (mittels Mittelpunktformel gefunden)und $\overrightarrow{PP'} = r\overrightarrow{n} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist wahr für $r = -4$.

Gesucht: Koordinatengleichung für E_3: Da E_3 parallel zu E_2 ist, gilt für E_3 die Gleichung: $2x + y + 3z = d$, nach Einsetzen den Punktes $Q(1|1|-1)$ erhalten wir $d = 0$. Somit hat E_3 die Koordinatengleichung $2x + y + 3z = 0$.

1.2.2 zu b):

Gesucht: Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 Wir lösen mittels GAUSS oder mittels GTR das folgende LGS:

$$\left| \begin{array}{c} x - 3y - 2z = -8 \\ 2x + y + 3z = 12 \end{array} \right|$$

und erhalten mit y als Parameter die Lösungsmenge $L = \{(x|y|z); (y|y|4-y)\}$
Daraus folgt die Gleichung der Schnittgeraden s mit der Parameterumbenennung $y = t$:

$$s : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittwinkel erhalten wir mit der folgenden Formel: $\cos \sphericalangle(E_1, E_2) = \left| \frac{\overrightarrow{n_1} o \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} \right|$ den Winkel $\sphericalangle(E_1, E_2) = 60°$

1.2.3 zu c):

Gesucht: Abstand der beiden parallelen Ebenen E_2 und E_3
Wir wählen aus E_2 den Punkt $P(0|0|4)$ und bestimmen dessen Abstand d^* von E_3 mit der Formel:
$d^*(E_2, E_3) = \left|\frac{ax_p+by_p+cz_p-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$
Wir setzen ein:
$d^*(E_2, E_3) = \left|\frac{2\bullet 0+1\bullet 0+3\bullet 4-0}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}\right|$
und erhalten:
$d^*(E_2, E_3) = \frac{12}{\sqrt{14}}$

1.2.4 zu d):

Gegeben: Die Gerade g durchläuft $Q(1|1|-1)$ und hat als Richtungsvektor den Normalenvektor von E_3

Gesucht: Durchstoßpunkt von g mit E_2

Lösung:
Aufstellen von g:
$s : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Wir setzen g in E_2 ein:
$2(1 + 2t) + 1 + t + 3(-1 + 3t) = 12$ und erhalten $t = \frac{6}{7}$ und nach Einsetzen von t in g erhalten wir flugs den Durchstoßpunkt $D(\frac{19}{7}|\frac{13}{7}|\frac{11}{7})$.

1.2.5 zu e):

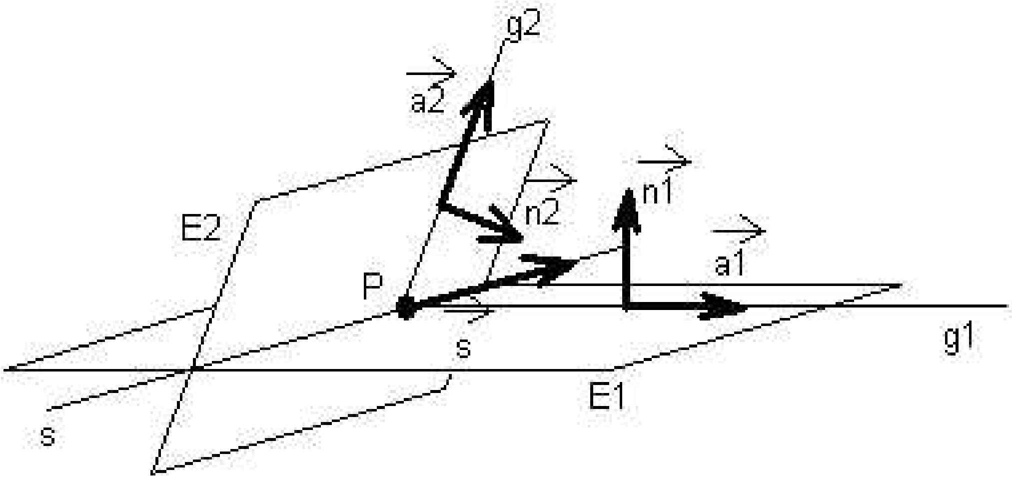

Abb. e_1

Die Lage der Geraden g_1 und g_2 wird durch Abb. e_1 dargestellt.
Gegeben sind: Der Punkt $P(3|y|z)$ und die Schnittgerade s aus Aufgabe b).

Um die Geradengleichungen g_1 und g_2 angeben zu können, benötigen wir den Punkt P und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{a_2}$.

Da P auf s liegt, setzen wir P in s ein und erhalten mit dieser Punktprobe mit $t = 3$ die Koordinaten von $P(3|3|1)$. Da die Geraden g_1 und g_2 rechtwinklig zu s verlaufen, folgen (siehe Abb. e_1) aus den Vektorprodukten mit den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_1}$ die gesuchten Richtungsvektoren.
Es gilt:

$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{s} X \overrightarrow{n_1} \Longrightarrow \overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{s} X \overrightarrow{n_2} \Longrightarrow \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Somit lauten die gesuchten Geradengleichungen:

$g_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$g_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Winkel zwischen den Geraden entspricht nun logischer Weise dem Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2, also:
$\sphericalangle(g_1, g_2) = 60^\circ$